Richard Hammack

İspat Yöntemleri

Çevirenler
Mehmet Dağlı & Oktay Ölmez

Teşekkür

Herhangi bir telif hakkı istemeden bu kitabı Türkçe'ye çevirmemize izin veren Richard Hammak'a teşekkür ederiz. Çeviriyi okuyarak birçok hatayı düzeltmemize yardım eden Merve Okur'a teşekkür ederiz. Yaptığımız çeviriyi titizlikle kontrol eden, çevirmekte zorlandığımız kısım ve kavramlar konusunda önerilerde bulunan Ercan Altınışık'a minnettarız.

İçindekiler

Önsöz

Bu kitabı, neredeyse hiç maliyeti olmayan kaliteli bir ders kitabı oluşturma arzusuyla yola çıkarak yazdım.

Kitap, ücretsiz olarak web sayfamda sunulmaktadır. İsteğe bağlı olarak basılan ciltsiz sürümünün maliyeti geleneksel ders kitaplarına nazaran çok daha düşüktür. Herhangi bir revizyon ya da yeni baskılar sadece hataları düzeltmek ve açıklamaları netleştirmek amacıyla yapılacaktır. Bunlara yeni alıştırmalar eklenebilir ancak mevcut olanlar gereksiz yere değiştirilmeyecek ya da yeniden numaralandırma yapılmayacaktır.

Bu kitap, küçük bir yüksek okul olan Randolph-Macon Koleji ve büyük bir devlet üniversitesi olan Virginia Commonwealth Üniversitesi'nde son on dört yıldır verdiğim ispat yöntemleri ders notlarının geliştirilmesi ve genişletilmesiyle oluşturulmuştur. Her iki üniversitedeki kitlenin ihtiyaçlarının aynı olduğu gözleminden yola çıkarak bu kitabı yazdım. Ancak daha geniş bir kitlenin ihtiyaçlarına karşı da duyarlıyım. Bu kitabın hemen hemen her matematik lisans programı için uygun olduğuna inanıyorum.

Bu ikinci baskı, dünya çapındaki okuyucular tarafından önerilen birçok küçük düzeltme ve ekleme içermektedir. Bunlara ek olarak bazı yeni örnekler ve alıştırmalar ile Cantor-Bernstein-Schröder teoremi üzerine bir bölüm Ünite 13'e eklenmiştir.

Richard Hammack — Richmond, Virginia

25 Mayıs 2013

Giriş

Bu kitap, teoremlerin nasıl ispatlanacağı hakkındadır.

Matematik, eğitiminizin muhtemelen bu noktasına kadar önceliği hesaplama olan bir disiplin şeklinde sunulmuştur. Bu süreçte denklemleri çözmeyi, türev ve integral almayı, matrisleri çarpmayı ve determinantları hesaplamayı öğrendiniz; bunların dünyamızdaki pratik soruları nasıl cevapladığını gördünüz. Bu bağlamda, matematiği öncelikli olarak cevapları bulmak için kullandınız.

Ancak matematiğin uygulamalarından çok, teorik olan başka bir tarafı vardır. Bu kitaptaki öncelikli hedefimiz matematiksel yapıları anlamak, matematiksel önermeleri ispatlamak ve hatta yeni teoremleri ve teorileri keşfetmek olacaktır. Şu ana kadar öğrenip kullandığınız matematiksel yöntem ve işlemler matematiğin bu teorik tarafı üzerine inşa edilmiştir. Örneğin, bir eğrinin altında kalan alan hesaplanırken analizin temel teoremi kullanılır. Bu teorem doğru olduğu için bulunan cevap da doğrudur. Fakat Analiz dersini öğrenirken, muhtemelen bir teoremin neden doğru olduğunu anlamaktan çok onun nasıl uygulanacağı konusuna odaklandınız. Ancak bunun doğru olduğunu nereden biliyoruz? Bu teoremin doğru olduğuna dair kendimizi veya bir başkasını nasıl ikna edebiliriz? Bu nitelikteki sorular matematiğin teorik tarafına aittir. Bu kitap, bu teorik taraf için bir giriş niteliği taşımaktadır.

Bu kitap size gizemli bir dünyanın kapısını açacaktır. Matematikçilerin teoremleri doğrulamak, matematiksel gerçeği keşfetmek ve yeni teorileri oluşturmak için kullandıkları düşünce yöntemlerini öğrenecek ve uygulayabileceksiniz. Bu ise sizi gelecekte alacağınız derslere hazırlayarak ispatları daha iyi anlamanızı ve kendi ispatlarınızı yapabilmenizi sağlayacak, matematiksel olarak meraklı ve eleştirel düşünmenize yardım edecektir.

Bu kitap aşağıda özetlendiği şekilde dört ana kısımdan oluşmaktadır.

Kısım I: Temel Kavramlar

- Ünite 1: Kümeler
- Ünite 2: Mantık
- Ünite 3: Sayma

Ünite 1 ve 2 matematikte kullanılan dili ve kuralları ortaya koyar. Her matematiksel yapı, nesne ya da varlık bir küme olarak ifade edilebilir. Bu nedenle kümeler konusu büyük bir önem taşır. Mantık; önermelerin anlamlarını kavramamıza, matematiksel yapılar hakkında bilgi edinmemize ve bu yapıları daha derin bir şekilde incelememize olanak sağladığı için temel bir önem arz eder. Sonraki bütün üniteler bu ilk iki ünite üzerine inşa edilmiştir. Ünite 3 bu kitaba kısmen dahil edilmiştir çünkü buradaki konular birçok matematik bilim dalının merkezinde bulunmakta ve bu kitapta kullanılan örnekler ile alıştırmaların çoğu için bir kaynak teşkil etmektedir. (İstenildiği taktirde dersin öğretim elemanı 3. üniteyi atlayabilir.)

Kısım II: Koşullu Önermelerin İspatı

- Ünite 4: Doğrudan İspat
- Ünite 5: Dolaylı İspat
- Ünite 6: Olmayana Ergi

Ünite 4'ün başından Ünite 6'nın sonuna kadar *"Eğer P ise Q."* koşullu formunda verilen teoremleri ispatlamak için kullanılan üç ana yöntemle ilgilenilecektir.

Kısım III: İspat Üzerine Daha Fazlası

- Ünite 7: Koşulsuz Önermelerin İspatlanması
- Ünite 8: Kümeleri İçeren İspatlar
- Ünite 9: Aksini İspat
- Ünite 10: Matematiksel Tümevarım

Buradaki üniteler, II. kısımda verilen ispat tekniklerinin kullanışlı versiyonları, çeşitlemeleri ve sonuçları ile ilgilenmektedir.

Kısım IV: Bağıntılar, Fonksiyonlar ve Kardinalite

- Ünite 11: Bağıntı
- Ünite 12: Fonksiyonlar
- Ünite 13: Kümelerin Kardinalitesi

Bu kısımdaki son üniteler, matematiğin merkezi konumunda bulunan fonksiyon kavramıyla ilgilenmektedir. Bu konuları anladıktan sonra, kombinatorik, soyut cebir, hesaplama teorisi, analiz ve topoloji gibi ileri matematik derslerine hazır olacaksınız.

Öğretim Elemanına Mesaj

Bu kitap üç kredilik bir ders için tasarlanmıştır. Aşağıda, ondört haftalık bir dönemde kullanılabilecek olası bir ders uygulama planı verilmiştir.

Hafta	Pazartesi	Çarşamba	Cuma
1	Bölüm 1.1	Bölüm 1.2	Bölüm 1.3, 1.4
2	Bölüm 1.5, 1.6, 1.7	Bölüm 1.8	Bölüm 1.9*, 2.1
3	Bölüm 2.2	Bölüm 2.3, 2.4	Bölüm 2.5, 2.6
4	Bölüm 2.7	Bölüm 2.8*, 2.9	Bölüm 2.10, 2.11*, 2.12*
5	Bölüm 3.1, 3.2	Bölüm 3.3	Bölüm 3.4,3.5*
6	SINAV	Bölüm 4.1, 4.2, 4.3	Bölüm 4.3, 4.4, 4.5*
7	Bölüm 5.1, 5.2, 5.3*	Bölüm 6.1	Bölüm 6.2, 6.3*
8	Bölüm 7.1, 7.2*, 7.3	Bölüm 8.1, 8.2	Bölüm 8.3
9	Bölüm 8.4	Bölüm 9.1, 9.2, 9.3*	Bölüm 10.0
10	Bölüm 10.0, 10.3*	Bölüm 10.1, 10.2	SINAV
11	Bölüm 11.0, 11.1	Bölüm 11.2, 11.3	Bölüm 11.4, 11.5
12	Bölüm 12.1	Bölüm 12.2	Bölüm 12.2
13	Bölüm 12.3, 12.4*	Bölüm 12.5	Bölüm 12.5, 12.6*
14	Bölüm 13.1	Bölüm 13.2	Bölüm 13.3, 13.4*

Sınıfta, $*$ ile işaretlenmiş bölümlerden kısaca bahsedilebilir veya bunları kendi başlarına öğrenmeleri için öğrencilere ödev olarak bırakabilirsiniz. Bazı öğretim elemanları tercihen 3. üniteyi atlayabilir.

Teşekkür

Bu kitabın ilk baskısını okuyarak geribildirim sunan Virginia Commonwealth Üniversitesi'ndeki MATH 3000 kodlu dersin öğrencilerine teşekkür ederim. Basım hatalarını ve tutarsızlıkları bularak düzelten Cory Colbert ve Lauren Pace'e özel olarak teşekkür ederim. Web sayfasındaki nihai taslağı yayınlamadan önce her bölümün taslak metinini okuyarak çok sayıda hatayı yakalayan Cory'ye özellikle minnettarım. Cory ayrıca bazı ilginç örnekleri önerdi, bazı çözümleri yazdı ve indeksi oluşturdu. Bu kitaptan ders anlatırken birçok iyileştirme tavsiye eden Andy Lewis ve Sean Cox'a teşekkür ederim. Dizgi alanında uzman olan ve isteğe bağlı yayım ile bu kitabın baskısını hayata geçiren Lon Mitchell'e minnettarım.

Ayrıca kitaptaki hatalar ve eksiklikler konusunda benimle temasa geçen tüm dünyadaki sayısız okuyucuya teşekkür ederim. Bu kitap sizlerin sayesinde daha iyi bir kitap oldu.

Kısım I

Temel Kavramlar

Bölüm 1

Kümeler

Matematiğin tamamı kümeler ile ifade edilebilir. Matematik bilgi düzeyiniz arttıkça, bu çok daha belirgin bir hâle gelecektir. Bunu, ileri seviyedeki derslerinizin çoğunda ve özellikle de bu derste açık bir şekilde göreceksiniz. Kümeler teorisi, matematiksel yapıların tamamını ifade etmek ve açıklamak için kullanılan mükemmel bir dildir.

1.1 Küme Kavramına Giriş

Küme, nesnelerden oluşan bir topluluktur. Bu topluluktaki nesneler, kümenin **elemanları** olarak adlandırılır. Biz ağırlıklı olarak elemanları sayılar, noktalar, fonksiyonlar vb. birer matematiksel nesne olan kümelerle ilgileneceğiz.

Genel olarak bir küme, elemanları iki süslü parantez arasında virgüller ile ayrılıp listelenerek gösterilir. Örneğin $\{2, 4, 6, 8\}$ topluluğu, dört elemanlı bir kümedir. Bu kümenin elemanları $2, 4, 6$ ve 8 sayılarıdır. Bazı kümelerin sonsuz sayıda elemanı vardır. Örneğin, bütün tamsayıların oluşturduğu

$$\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

topluluğunu göz önüne alalım. Baştaki ve sondaki üç nokta, sayı örüntüsünün hem pozitif hem de negatif yönde sonsuza kadar devam ettiğini belirtir. Sonsuz sayıda elemanı olan bir kümeye **sonsuz** küme, aksi halde **sonlu** küme denir.

Tamamen aynı elemanlardan oluşan iki küme **eşittir**. Örneğin, elemanları farklı şekilde sıralanmış olsa da $\{2, 4, 6, 8\} = \{4, 2, 8, 6\}$ olur çünkü bu kümelerin elemanları aynıdır. Diğer taraftan $\{2, 4, 6, 8\} \neq \{2, 4, 6, 7\}$ olur. Ayrıca

$$\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots\}$$

olduğu görülebilir.

Kümeler genellikle büyük harflerle temsil edilir. Örneğin $\{2, 4, 6, 8\}$ kümesinden bahsederken, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ olduğunu bildirir ve bundan sonra $\{2, 4, 6, 8\}$ yerine A harfini kullanabiliriz. Buna göre 2 tamsayısının A kümesinin bir elemanı olduğunu belirtmek için $2 \in A$ yazar ve "*2 tamsayısı A*

kümesinin bir elemanıdır." veya *"2 eleman A'dır."* ya da kısaca *"2, A'dadır."* diye okuruz. Benzer şekilde $4 \in A$, $6 \in A$, $8 \in A$ fakat $5 \notin A$ olduğu açıktır. Son ifadeyi *"5 sayısı A'nın bir elemanı değildir."* ya da *"5 eleman değil A."* şeklinde okuruz. Ayrıca $6, 2 \in A$ veya $2, 4, 8 \in A$ biçimindeki ifadelerle, birden fazla nesnenin bir kümeye ait olduğunu belirtiriz.

Bazı kümeler o kadar önemli ve yaygındır ki bunlar için özel semboller kullanırız. **Doğal sayılar** (yani pozitif tamsayılar) kümesi bunlardan biridir. Bu küme $\mathbb{N}$ ile gösterilir:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}.$$

Önemli kümelerden bir başkası da

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

ile verilen **tamsayılar** kümesidir. Analiz derslerinden size kuşkusuz bir şekilde tanıdık gelen **reel sayılar** kümesini $\mathbb{R}$ sembolü temsil eder. Diğer özel kümelere bu bölümde daha sonra yer verilecektir.

Kümelerin elemanları sadece sayılar olmak zorunda değildir. Örneğin, $B = \{D, Y\}$ kümesi iki tane harften oluşur. Bu harfler "doğru" ve "yanlış" değerlerini temsil edebilir. $C = \{a, e, i, o, u\}$ kümesi İngiliz alfabesinin küçük sesli harflerinden oluşur. $D = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$ kümesinin elemanları, $xy-$koordinat düzlemindeki bir karenin köşe noktalarıdır. Burada $(0,0) \in D$, $(1,0) \in D$ fakat (örneğin) $(1,2) \notin D$ olur. Ayrıca elemanları başka kümeler olan kümeler bile olabilir. Örneğin, $E = \{1, \{2,3\}, \{2,4\}\}$ kümesinin üç elemanı vardır: 1 sayısı, $\{2,3\}$ kümesi ve $\{2,4\}$ kümesi. Buna göre $1 \in E$, $\{2,3\} \in E$ ve $\{2,4\} \in E$ olur. Fakat $2 \notin E$, $3 \notin E$ ve $4 \notin E$ olduğu görülebilir.

İki-çarpı-iki tipindeki üç tane matristen oluşan $M = \{\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]\}$ kümesini göz önüne alalım. Burada $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] \in M$ fakat $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right] \notin M$ olduğu görülebilir. Bu kümenin elemanları harfler kullanılarak da temsil edilebilir. Eğer $a = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $b = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ ve $c = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ ise $M = \{a, b, c\}$ olur.

Sonlu bir X kümesinin eleman sayısı $|X|$ ile gösterilir ve bu sayıya kümenin **kardinalitesi** denir. Yukarıda verilen kümeler için $|A| = 4$, $|B| = 2$, $|C| = 5$, $|D| = 4$, $|E| = 3$ ve $|M| = 3$ olduğu açıktır.

Küçük olmasına rağmen çok büyük bir rol oynayan özel bir küme vardır. **Boş küme**, hiçbir elemanı olmayan $\{\}$ kümesidir. Bu küme $\varnothing$ ile gösterilir yani $\varnothing = \{\}$ olur. Böylece $\varnothing$ sembolü her zaman $\{\}$ anlamına gelir. Görüleceği üzere $|\varnothing| = 0$ olur. Kardinalitesi sıfır olan tek küme boş kümedir.

Boş küme yazılırken dikkat edilmeli ve $\varnothing$ yazmak isterken, yerine $\{\varnothing\}$ yazılmamalıdır. Bu iki küme eşit olmaz çünkü $\varnothing$ hiçbir nesne içermez ancak $\{\varnothing\}$ bir tane nesneyi yani boş kümeyi içerir. Eğer bu kafanızı karıştırıyor ise kümeleri içerisinde nesneler olan kutular olarak düşünebilirsiniz. Örneğin $\{2, 4, 6, 8\}$ kümesi, dört tane sayı içeren bir "kutudur." Buna göre $\varnothing = \{\}$ de boş kutudur. Buna karşılık $\{\varnothing\}$, içinde boş kutu olan bir kutudur. Bu ikisi arasındaki fark açıktır: Boş kutu, içerisinde boş kutu olan bir kutudan farklıdır. Bu nedenle $\varnothing \neq \{\varnothing\}$ olur. (Dikkat edilirse $|\varnothing| = 0$ ve $|\{\varnothing\}| = 1$ olması, $\varnothing \neq \{\varnothing\}$ olmasının bir başka kanıtıdır.)

Kümeler üzerinde çalışırken, kutu benzetmesi faydalı olabilir. İlk bakışta $F = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$ kümesi garip görünebilir ancak bu gerçekten de basit bir kümedir. Bu küme, şu üç nesneyi içeren bir kutu olarak düşünülebilir: boş kutu, boş kutu içeren bir kutu ve boş kutu içeren bir kutuyu içeren başka bir kutu. Bu nedenle $|F| = 3$ olur. Öbür yandan $G = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ kümesi, iki tane kutu içeren bir kutudur. Bunlar, doğal sayıları ve tamsayıları içeren kutulardır. Böylelikle $|G| = 2$ olur.

Çok büyük ya da çok karmaşık kümeleri, iki süslü parantez arasında listelemek için **ortak özellik yöntemi** adı verilen özel bir notasyon kullanılır. Örneğin, $Ç = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ ile verilen çift tamsayılar kümesini ele alalım. Bu küme ortak özellik yöntemiyle

$$Ç = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki iki nokta işareti, "*formundaki bütün elemanlardan oluşur, öyle ki*" diye okunur. Buna göre $Ç = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ ifadesi, *"Ç kümesi,* $2n$ *formundaki bütün elemanlardan oluşur, öyle ki* n *eleman* $\mathbb{Z}$*'dir."* olarak okunur.

Genel olarak ortak özellik yöntemiyle yazılan bir X kümesi

$$X = \{\text{ifade} : \text{kural}\}$$

formundadır. Buradan X kümesinin elemanlarının, "kural" tarafından belirlenen tüm "ifade" değerleri olduğu anlaşılır. Örneğin yukarıda verilen $Ç$ kümesi, $n \in \mathbb{Z}$ kuralını sağlayan $2n$ formundaki tüm ifade değerlerinin kümesidir. Bu kümeyi ifade etmenin birçok yolu vardır. Örneğin, $Ç = \{2n : n \in \mathbb{Z}\} = \{n : n \text{ çift bir tamsayı}\} = \{n : n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ bunlardan bazılarıdır. Bu küme, yaygın olarak

$$Ç = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ çift}\}$$

biçiminde de gösterilir ve *"Ç kümesi,* $n \in \mathbb{Z}$ *formundaki bütün elemanlardan oluşur, öyle ki* n *çifttir."* şeklinde okunur. Bazı yazarlar, $Ç = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ çift}\}$ örneğinde olduğu gibi ki nokta yerine düz çizgi kullanır. Biz iki nokta kullanacağız.

Örnek 1.1. Aşağıda, ortak özellik yöntemi ile ilgili başka örnekler verilmiştir.

1. $\{n : n \text{ bir asal sayı}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$
2. $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ asal}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$
3. $\{n^2 : n \in \mathbb{Z}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 = 0\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
5. $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 2 = 0\} = \varnothing$
6. $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 4\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

7. $\{2x : x \in \mathbb{Z}, |x| < 4\} = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$

8. $\{x \in \mathbb{Z} : |2x| < 4\} = \{-1, 0, 1\}$

Son üç örnek, her zaman dikkat edilmesi gereken bir notasyon karmaşasına dikkat çeker. Eğer X bir sayı ise $|X|$ ifadesi bu sayının *mutlak değeri* anlamına gelir. Ancak X bir küme ise $|X|$ ifadesi bu kümenin *kardinalitesi* anlamına gelir. Aralarındaki fark, konu içeriğinden açıkça belli olmalıdır. Örnek 1.1 (6)'da verilen $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 4\}$ kümesinde, $x \in \mathbb{Z}$ olduğu için x bir sayıdır ve $|x|$ ifadesi mutlak değer anlamına gelir yani kardinalite değildir. Diğer taraftan $A = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{7\}\}$ ve $B = \{X \in A : |X| < 3\}$ olduğunu kabul edelim. A kümesinin elemanları (sayılar değil) kümeler olduğu için B kümesinin gösteriminde kullanılan $|X|$ ifadesi kardinalite anlamına gelir. Böylece $B = \{\{1, 2\}, \{7\}\}$ olur.

Bu bölümü, özel kümelerin bir özetini vererek bitirelim. Bu kümeler ya da bu formdaki kümeler o kadar sık kullanılır ki bunlara özel isimler ve semboller verilmiştir.

- Boş küme: $\varnothing = \{\}$
- Doğal sayılar: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- Tamsayılar: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- Rasyonel sayılar: $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$
- Reel sayılar: $\mathbb{R}$ (sayı doğrusu üzerindeki bütün reel sayıların kümesi)

Dikkat edileceği üzere $\mathbb{Q}$ kümesi, iki tamsayının oranı olarak bir kesir biçiminde yazılabilen tüm sayıların kümesidir. Mutlaka farkındasınızdır ki $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ fakat $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ olduğu için $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ olur.

Aşağıda, analiz derslerinden hatırlayacağınız bazı özel kümeler verilmiştir. Herhangi iki $a, b \in \mathbb{R}$ verildiğinde, $a < b$ olmak üzere sayı doğrusu üzerinde çeşitli aralıklar oluşturabiliriz.

- Kapalı aralık: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
- Yarı açık aralık: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
- Yarı açık aralık: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
- Açık aralık: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- Sonsuz aralık: $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- Sonsuz aralık: $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$
- Sonsuz aralık: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
- Sonsuz aralık: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$

Bu kümelerin, sayı doğrusu üzerindeki aralıklar olduğunu unutmayınız. Bu nedenlere, bunların elemanları sonsuz çokluktadır. Uç noktaları birbirine yakın olsa dahi $(0.1, 0.2)$ kümesinin sonsuz çoklukta elemanı vardır. Maalesef (a, b) sembolü, sayı doğrusu üzerindeki bir aralığın yanı sıra, düzlem üzerindeki bir noktayı temsil etmek için de kullanılır. Bu ikisi arasındaki fark genellikle konu içeriğinden anlaşılır. Bir sonraki bölümde (a, b) sembolünün başka bir anlamını daha göreceğiz.

Alıştırmalar

A. Aşağıdaki kümeleri listeleme yöntemini kullanarak yeniden yazınız.

1. $\{5x-1 : x \in \mathbb{Z}\}$
2. $\{3x+2 : x \in \mathbb{Z}\}$
3. $\{x \in \mathbb{Z} : -2 \leqslant x < 7\}$
4. $\{x \in \mathbb{N} : -2 < x \leqslant 7\}$
5. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 3\}$
6. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 9\}$
7. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x = -6\}$
8. $\{x \in \mathbb{R} : x^3 + 5x^2 = -6x\}$
9. $\{x \in \mathbb{R} : \sin \pi x = 0\}$
10. $\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 1\}$
11. $\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 5\}$
12. $\{x \in \mathbb{Z} : |2x| < 5\}$
13. $\{x \in \mathbb{Z} : |6x| < 5\}$
14. $\{5x : x \in \mathbb{Z}, |2x| \leqslant 8\}$
15. $\{5a + 2b : a, b \in \mathbb{Z}\}$
16. $\{6a + 2b : a, b \in \mathbb{Z}\}$

B. Aşağıdaki kümeleri ortak özellik yöntemini kullanarak yeniden yazınız.

17. $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$
18. $\{0, 4, 16, 36, 64, 100, \dots\}$
19. $\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$
20. $\{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\}$
21. $\{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$
22. $\{3, 6, 11, 18, 27, 38, \dots\}$
23. $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
24. $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$
25. $\{\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$
26. $\{\dots, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \dots\}$
27. $\{\dots, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, \dots\}$
28. $\{\dots, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, 3, \frac{15}{4}, \frac{9}{2} \dots\}$

C. Aşağıdaki kardinaliteleri hesaplayınız.

29. $|\{\{1\}, \{2, \{3, 4\}\}, \varnothing\}|$
30. $|\{\{1, 4\}, a, b, \{\{3, 4\}\}, \{\varnothing\}\}|$
31. $|\{\{\{1\}, \{2, \{3, 4\}\}, \varnothing\}\}|$
32. $|\{\{\{1, 4\}, a, b, \{\{3, 4\}\}, \{\varnothing\}\}\}|$
33. $|\{x \in \mathbb{Z} : |x| < 10\}|$
34. $|\{x \in \mathbb{N} : |x| < 10\}|$
35. $|\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 10\}|$
36. $|\{x \in \mathbb{N} : x^2 < 10\}|$
37. $|\{x \in \mathbb{N} : x^2 < 0\}|$
38. $|\{x \in \mathbb{N} : 5x \leqslant 20\}|$

D. Aşağıdaki verilen noktaların kümesini $xy-$düzleminde çiziniz.

39. $\{(x,y) : x \in [1,2], y \in [1,2]\}$
40. $\{(x,y) : x \in [0,1], y \in [1,2]\}$
41. $\{(x,y) : x \in [-1,1], y = 1\}$
42. $\{(x,y) : x = 2, y \in [0,1]\}$
43. $\{(x,y) : |x| = 2, y \in [0,1]\}$
44. $\{(x,x^2) : x \in \mathbb{R}\}$
45. $\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}, x^2+y^2 = 1\}$
46. $\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}, x^2+y^2 \leqslant 1\}$
47. $\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}, y \geqslant x^2-1\}$
48. $\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}, x > 1\}$
49. $\{(x,x+y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Z}\}$
50. $\{(x,\frac{x^2}{y}) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{N}\}$
51. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y-x)(y+x) = 0\}$
52. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y-x^2)(y+x^2) = 0\}$

1.2 Kartezyen Çarpım

A ve B kümeleri verilsin. Bu kümeleri, bir anlamda "çarparak" $A \times B$ ile gösterilen yeni bir küme oluşturmak mümkündür. Bu işlem *kartezyen çarpım* olarak adlandırılır. Bunu anlamak için öncelikle sıralı ikili kavramını anlamamız gerekir.

Tanım 1.1. *Herhangi iki x ve y nesnesini parantez içine yazıp virgül ile ayırarak elde edilen (x,y) ifadesine bir **sıralı ikili** denir.*

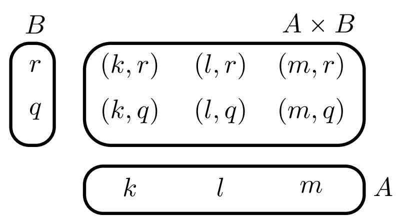
Örneğin, $(2,4)$ ve $(4,2)$ birer sıralı ikilidir. Bu sıralı ikililer, aynı bileşenlerde oluşmasına rağmen, birbirinden farklıdır çünkü bileşenlerin sırası farklıdır. Bunu belirtmek için $(2,4) \neq (4,2)$ yazarız. Bu noktada, analiz dersinde yapıldığı gibi, sıralı ikililerin düzlemdeki noktaları belirtmek için kullanılabileceğini görebilirsiniz ancak sıralı ikililerin kullanımı sadece bununla sınırlı değildir. Sıralı ikililerin bileşenleri ille de birer sayı olmak zorunda değildir. Örneğin, (m,l) sıralı ikilisinin bileşenleri birer harf; $(\{2,5\},\{3,2\})$ sıralı ikilisinin bileşenleri ise birer kümedir. Hatta $((2,4),(4,2))$ bile bir sıralı iklidir. Bunlara ek olarak $(2,\{1,2,3\})$ ve $(\mathbb{R},(0,0))$ ifadeleri de birer sıralı ikilidir. Parantez içerisinde listelenen iki bileşen daima bir sıralı ikilidir. Artık kartezyen çarpımı tanımlayabiliriz.

Tanım 1.2. *A ve B kümelerinin **kartezyen çarpımı**, $A \times B$ ile gösterilen başka bir küme olup $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ olarak tanımlıdır.*

Buna göre $A \times B$ kümesi, ilk bileşeni A ve ikinci bileşeni B kümelerinden gelen bütün sıralı ikililerin kümesidir. Örneğin, eğer $A = \{k,l,m\}$ ve $B = \{q,r\}$ ise

$$A \times B = \{(k,q),(k,r),(l,q),(l,r),(m,q),(m,r)\}$$

olur. Şekil 1.1'de, $A \times B$ için şematik bir diyagramının nasıl oluşturulacağı gösterilmiştir. Bunun için A ve B kümeleri x ve $y-$eksenlerini oluştururcasına yani A kümesinin elemanları yatay ve B kümesinin elemanları da düşey olarak sıralanır. Daha sonra (x, y) sıralı ikilisi, x ile başlayan sütuna ve y ile başlayan satıra ait olacak şekilde diyagram doldurulur.

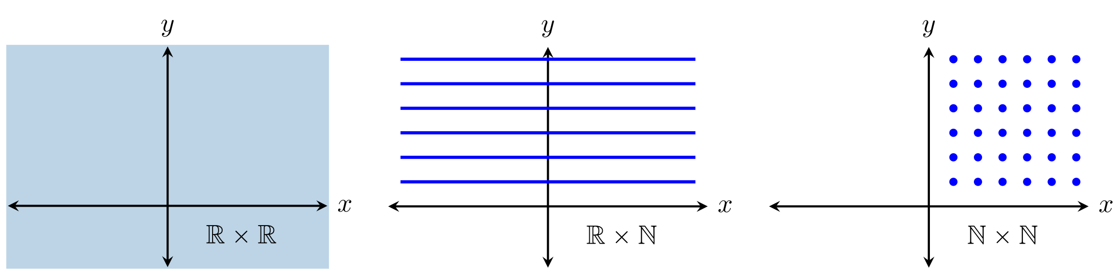


Şekil 1.1: Kartezyen çarpım diyagramı

Başka bir örnek olarak $\{0, 1\} \times \{2, 1\} = \{(0, 2), (0, 1), (1, 2), (1, 1)\}$ verilebilir. Bu örneği görsel olarak düşünmek isterseniz, Şekil 1.1'dekine benzer bir diyagram çizebilirsiniz. Bu tür diyagramlardaki dikdörtgensel dizilim, bize aşağıdaki gözlemi yapma fırsatı verir.

Gözlem 1.1. *Eğer A ve B kümeleri sonlu ise $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ olur.*

Sizin için $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ oldukça tanıdık bir küme olmalıdır. Kartezyen düzlem üzerindeki bütün noktaların kümesi olarak düşünülebilecek olan bu kümenin grafiği Şekil 1.2(a)'da verilmiştir. Öbür yandan $\mathbb{R} \times \mathbb{N} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{N}\}$ kümesi, kartezyen düzlemde $y-$koordinatı bir doğal sayı olan noktaların kümesi olarak görülebilir. Bu küme Şekil 1.2(b)'de gösterilmiştir. Dikkat edilirse $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ kümesi, $x-$eksinine olan uzaklığı birer tamsayı olan sonsuz sayıdaki yatay doğruların kümesidir. Bunlara ek olarak $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesi kartezyen düzlemde, her iki koordinatı da birer doğal sayı olan noktaların kümesi olarak düşünülebilir. Bu küme, Şekil 1.2(c)'de gösterildiği gibi, birinci bölgedeki bir ızgaranın köşelerine yerleştirilmiş noktaların kümesine benzer.



(a) (b) (c)

Şekil 1.2: Kartezyen çarpım gösterimleri

Kartezyen çarpımı alınan kümelerden birisi, $\mathbb{R} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) = \{(x, (y, z)) : x \in \mathbb{R}, (y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$ örneğinde olduğu gibi, kendi başına bir kartezyen çarpım olabilir.

Sıralı ikililerin ötesine geçerek, üç ya da daha fazla kümenin kartezyen çarpımını tanımlayabiliriz. **Sıralı üçlü**, (x, y, z) biçimindeki bir listedir. Örneğin $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ kümelerinin kartezyen çarpımı $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z} = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{Z}\}$ ile verilir. Kuşkusuz ki bu tanımları sıralı üçlülerde sonlandırmak için herhangi bir neden yoktur. Genelleyecek olursak, aşağıdaki tanımı verebiliriz:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \text{her } i = 1, 2, \ldots, n \text{ için } x_i \in A_i\}.$$

Kartezyen çarpım kümelerindeki parantez kullanımına dikkat edilmelidir. Örneğin $\mathbb{R} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$ ve $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ arasında küçük bir fark vardır. Bunlardan ilki, elemanları $(x, (y, z))$ formundaki sıralı ikililer olan iki tane kümenin kartezyen çarpımıdır. İkincisi ise üç tane kümenin kartezyen çarpımıdır ve elemanları (x, y, z) formundadır. Şüphesiz ki birçok durumda, $(x, (y, z))$ ve (x, y, z) gibi ifadeler arasındaki ayrımı gözardı etmenin hiçbir sakıncası yoktur ancak biz şimdilik onların farklı olduklarını düşünelim.

Kümelerin **kartezyen kuvvetlerini** alabiliriz. Herhangi bir A kümesi ve n pozitif tamsayısı için A kümesinin kendisi ile n defa kartezyen çarpımı A^n ile gösterilir:

$$A^n = A \times A \times \cdots \times A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in A\}.$$

Böylelikle $\mathbb{R}^2$ aşina olduğumuz kartezyen düzlem ve $\mathbb{R}^3$ ise üç boyutlu uzaydır. Diğer taraftan $\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ kümesini, $\mathbb{R}^2$ düzlemi üzerindeki bir ızgaranın köşelerine yerleştirilmiş noktaların kümesi olarak düşünebilirsiniz. Benzer şekilde $\mathbb{Z}^3 = \{(m, n, p) : m, n, p \in \mathbb{Z}\}$ kümesi, $\mathbb{R}^3$ uzayındaki $3-$boyutlu ızgaraların köşelerine yerleştirilmiş noktaların kümesidir.

Diğer derslerde, $\mathbb{R}^n$ kümesine çok benzeyen ancak biraz daha farklı anlama sahip kümelerle karşılaşabilirsiniz. Örneğin, bileşenleri reel sayılar olan iki-çarpı-üç tipindeki bütün matrislerin kümesini göz önüne alalım:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix} : u, v, w, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bu küme gerçekten de

$$\mathbb{R}^6 = \{(u, v, w, x, y, z) : u, v, w, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

kümesinden çok farklı değildir. Bu kümelerin elemanları, altı tane reel sayının sadece farklı şekillerde dizilmesinden elde edilir. Bu benzerliklerine rağmen $M \neq \mathbb{R}^6$ olduğunu yani iki-çarpı-üç tipindeki matrisler ile sıralı altılıların aynı şey olmadığını düşünmeye devam edeceğiz.

Alıştırmalar

A. Aşağıda verilen kümelerin elemanlarını listeleme yöntemini kullanarak yazınız.

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, c\}$ olsun.

(a) $A \times B$
(b) $B \times A$
(c) $A \times A$
(d) $B \times B$
(e) $\varnothing \times B$
(f) $(A \times B) \times B$
(g) $A \times (B \times B)$
(h) B^3

2. $A = \{\pi, e, 0\}$ ve $B = \{0, 1\}$ olsun.

(a) $A \times B$
(b) $B \times A$
(c) $A \times A$
(d) $B \times B$
(e) $A \times \varnothing$
(f) $(A \times B) \times B$
(g) $A \times (B \times B)$
(h) $A \times B \times B$

3. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\} \times \{a, c, e\}$
4. $\{n \in \mathbb{Z} : 2 < n < 5\} \times \{n \in \mathbb{Z} : |n| = 5\}$
5. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 2\} \times \{x \in \mathbb{R} : |x| = 2\}$
6. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = x\} \times \{x \in \mathbb{N} : x^2 = x\}$
7. $\{\varnothing\} \times \{0, \varnothing\} \times \{0, 1\}$
8. $\{0, 1\}^4$

B. Aşağıda verilen kartezyen çarpımları $xy-$düzlemi yani $\mathbb{R}^2$ (son ikisini de $\mathbb{R}^3$) üzerinde çiziniz.

9. $\{1, 2, 3\} \times \{-1, 0, 1\}$
10. $\{-1, 0, 1\} \times \{1, 2, 3\}$
11. $[0, 1] \times [0, 1]$
12. $[-1, 1] \times [1, 2]$
13. $\{1, 1.5, 2\} \times [1, 2]$
14. $[1, 2] \times \{1, 1.5, 2\}$
15. $\{1\} \times [0, 1]$
16. $[0, 1] \times \{1\}$
17. $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$
18. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
19. $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$
20. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\} \times [0, 1]$

1.3 Altkümeler

Bir A kümesine ait olan her eleman, aynı zamanda başka bir B kümesine de ait olabilir. Örneğin, $A = \{0, 2, 4\}$ kümesinin her elemanı $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin de bir elemanıdır. A ile B bu şekilde ilişkilendirildiğinde, A kümesi B kümesinin bir *altkümesidir* deriz.

Tanım 1.3. *A ve B iki küme olsun. Eğer A'nın her elemanı B'nin de bir elemanı ise A kümesi B'nin bir **altkümesidir** der ve $A \subseteq B$ yazarız. Eğer A kümesi B'nin bir altkümesi* değil *yani A'nın bazı elemanları B'ye ait değil ise $A \nsubseteq B$ yazarız. Böylece $A \nsubseteq B$ ifadesi, A'da olan ancak B'de* olmayan *en az bir elemanın varolması anlamına gelir.*

Örnek 1.2. Aşağıdakilerden her birinin neden doğru olduğunu anladığınızdan emin olunuz.

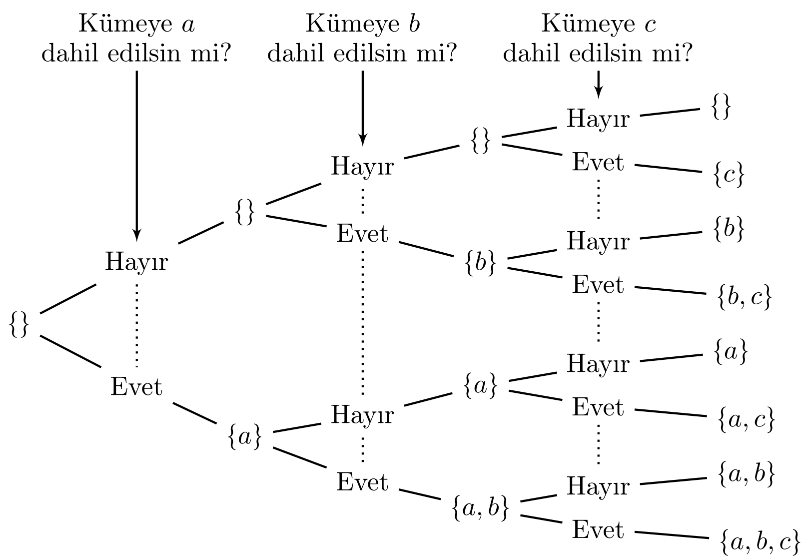
1. $\{2,3,7\} \subseteq \{2,3,4,5,6,7\}$
2. $\{2,3,7\} \nsubseteq \{2,4,5,6,7\}$
3. $\{2,3,7\} \subseteq \{2,3,7\}$
4. $\{2n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$
5. $\{(x, \sin(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$
6. $\{2,3,5,7,11,13,17,\dots\} \subseteq \mathbb{N}$
7. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
8. $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Bu bizi oldukça önemli olan şu gözleme götürür: B hangi küme olursa olsun, $\varnothing \subseteq B$ olur. Bunun neden doğru olduğunu görmek için Tanım 1.3'deki son cümleye bakalım. Bu cümleye göre $\varnothing \nsubseteq B$ ifadesi, $\varnothing$'de olan ancak B'de olmayan en az bir elemanın varolması anlamına gelir. Fakat böyle bir şey olamaz çünkü $\varnothing$ hiç eleman içermez! Bu nedenle $\varnothing \nsubseteq B$ ifadesi doğru değildir yani $\varnothing \subseteq B$ olmalıdır.

Gözlem 1.2. *Boş küme her kümenin altkümesidir yani her B kümesi için $\varnothing \subseteq B$ olur.*

Buna başka bir açıdan şöyle bakabiliriz: B'nin bir altkümesini, $\{\}$ süslü parantezlerini alıp bunun içini B kümesinden seçilen elemanlarla doldurduğumuz bir kutu olarak olarak düşünelim. Örneğin, $B = \{a,b,c\}$ kümesinin bir altkümesini oluşturmak için $\{\}$ ifadesini alır ve bunun içini B'den seçtiğimiz b ile c elemanları ile doldurursak $\{b,c\}$ altkümesini elde ederiz. Alternatif olarak, sadece a elemanını seçip $\{a\}$ altkümesini oluşturabilir ve bu şekilde devam edebiliriz. Ancak buradaki seçeneklerden biri de B'den hiçbir eleman seçmemektir. Bu seçim, bizi $\{\}$ altkümesiyle baş başa bırakır. Böylece $\{\} \subseteq B$ olur. Sıklıkla bunu $\varnothing \subseteq B$ şeklinde yazarız.

Bir altkümeyi bu şekilde "oluşturma" fikri, bir kümenin bütün altkümelerini listelemek için kullanılabilir. Örnek olarak, $B = \{a,b,c\}$ kümesinin bütün altkümelerini yazalım. Bu işi yapmanın bir yolu, ağaç benzeri bir yapı oluşturmaktır. Bunun için Şekil 1.3'ün en solunda gösterilen $\{\}$ altkümesi ile başlayalım. İlk önce B kümesinden a elemanını ele alalım. Bu elemanı $\{\}$'ye dahil etme ya da etmeme gibi iki seçeneğimiz vardır. Buna göre $\{\}$'den başlayan doğrular, yapılan seçime göre ya $\{\}$ ya da $\{a\}$ kümesi yönündedir. Şimdi B kümesinin b elemanına geçelim. Bu elemanı biraz önce oluşturduğumuz kümelere ya dahil edebiliriz ya da etmeyiz. Buna göre diyagram üzerindeki doğrular, elde edilecek olan $\{\}$, $\{b\}$, $\{a\}$ veya $\{a,b\}$ kümelerini işaret eder. Son olarak, bu kümelerin her birine c elemanını ya dahil edebiliriz ya da etmeyiz. Böylece diyagramın en sağındaki sütunda yer alan $\{\}$, $\{c\}$, $\{b\}$, $\{b, c\}$, $\{a\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b\}$ ve $\{a, b, c\}$ kümelerini elde ederiz. Bunlar, $B = \{a, b, c\}$ kümesinin sekiz adet altkümesidir.



Şekil 1.3: Altkümeleri listelemek için kullanılan bir "ağaç"

Eğer $B = \{a\}$ olsaydı bu ağacın dallanma biçiminden dolayı B kümesinin sadece iki tane altkümesi olurdu ki bunlar diyagramın ikinci sütununda verilmiştir. Eğer $B = \{a, b\}$ olsaydı B kümesinin dört tane altkümesi olurdu ki bunlar diyagramın üçüncü sütununda verilmiştir. Bu şekilde devam edildiğinde görüleceği üzere, ağaç her dal verdiğinde altkümelerin sayısı iki katına çıkar. Sonuç olarak eğer $|B| = n$ ise B kümesinin 2^n tane altkümesi olmalıdır.

Gözlem 1.3. *Eğer sonlu bir kümenin n tane elmanı var ise 2^n tane altkümesi vardır.*

Biraz daha karmaşık bir örnek için $B = \{1, 2, \{1, 3\}\}$ kümesinin bütün altkümelerini yazalım. Bu kümenin üç tane elemanı vardır: 1, 2 ve $\{1, 3\}$. Bu noktada, B'nin altkümelerini yazmak için bir ağaç çizmek bile gerekmez. Bu elamanlar arasından olası tüm seçimleri yapıp bunları parantez içine alırsak

$$\{\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{\{1,3\}\},\ \{1,2\},\ \{1,\{1,3\}\},\ \{2,\{1,3\}\},\ \{1,2,\{1,3\}\}$$

kümelerini elde ederiz. Bu sekiz altküme, B'nin bütün altkümeleridir. Bu türdeki alıştırmalar, bir altkümenin ne olduğunu ve ne olmadığını anlamanıza yardımcı olur. Örneğin, hemen farkına varacağınız üzere $\{1, 3\}$ kümesi B'nin bir altkümesi *değildir* çünkü 3 tamsayısı B kümesine ait değildir. Bu nedenle B'den elemanlar seçilerek bu küme oluşturulamaz. Ancak $\{1, 3\} \nsubseteq B$ olmasına rağmen $\{1, 3\} \in B$ ifadesi *doğrudur*. Ayrıca, $\{\{1, 3\}\} \subseteq B$ olduğu görülebilir.

Örnek 1.3. Aşağıdaki önermelerin neden doğru olduklarını anladığınızdan emin olmalısınız. Bunların her biri, kümeler teorisinin şu ana kadar öğrendiğiniz bir kısmı ile ilgilidir.

1. $1 \in \{1, \{1\}\}$ .... 1 tamsayısı, $\{1, \{1\}\}$ kümesinde listelenen ilk elemandır.
2. $1 \nsubseteq \{1, \{1\}\}$ .... çünkü 1 küme değildir.
3. $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$ .... $\{1\}$ elemanı, $\{1, \{1\}\}$ kümesinde listelenen ikinci elemandır.
4. $\{1\} \subseteq \{1, \{1\}\}$ .... $\{1, \{1\}\}$ kümesinden 1 elemanı seçilerek $\{1\}$ altkümesi oluşturulur.
5. $\{\{1\}\} \notin \{1, \{1\}\}$ .... çünkü 1 ve $\{1\}$ elemanları $\{1, \{1\}\}$ kümesindedir ama $\{\{1\}\}$ değildir.
6. $\{\{1\}\} \subseteq \{1, \{1\}\}$ .... $\{1, \{1\}\}$ kümesinden $\{1\}$ seçilerek $\{\{1\}\}$ altkümesi oluşturulur.
7. $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$ .... çünkü $\mathbb{N}$ bir kümedir (sayı değildir) ve $\mathbb{N}$ sadece sayıları içerir.
8. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$ .... çünkü her X kümesi $X \subseteq X$ şartını sağlar.
9. $\varnothing \notin \mathbb{N}$ .... çünkü $\mathbb{N}$ sadece sayıları içerir ve hiçbir kümeyi içermez.
10. $\varnothing \subseteq \mathbb{N}$ .... çünkü boş küme her kümenin bir altkümesidir.
11. $\mathbb{N} \in \{\mathbb{N}\}$ .... çünkü $\{\mathbb{N}\}$ sadece $\mathbb{N}$ elemanından oluşan kümedir.
12. $\mathbb{N} \nsubseteq \{\mathbb{N}\}$ .... çünkü, örneğin, $1 \in \mathbb{N}$ fakat $1 \notin \{\mathbb{N}\}$ olur.
13. $\varnothing \notin \{\mathbb{N}\}$ .... $\{\mathbb{N}\}$ kümesinin tek elemanı $\mathbb{N}$'dir ve $\mathbb{N} \neq \varnothing$'dir.
14. $\varnothing \subseteq \{\mathbb{N}\}$ .... çünkü boş küme her kümenin bir altkümesidir.
15. $\varnothing \in \{\varnothing, \mathbb{N}\}$ .... $\{\varnothing, \mathbb{N}\}$ kümesinde listelenen ilk eleman $\varnothing$'dir.
16. $\varnothing \subseteq \{\varnothing, \mathbb{N}\}$ .... çünkü boş küme her kümenin bir altkümesidir.
17. $\{\mathbb{N}\} \subseteq \{\varnothing, \mathbb{N}\}$ .... $\{\varnothing, \mathbb{N}\}$ kümesinden $\mathbb{N}$ seçilerek $\{\mathbb{N}\}$ altkümesi oluşturulur.
18. $\{\mathbb{N}\} \nsubseteq \{\varnothing, \{\mathbb{N}\}\}$ .... çünkü $\mathbb{N} \notin \{\varnothing, \{\mathbb{N}\}\}$.
19. $\{\mathbb{N}\} \in \{\varnothing, \{\mathbb{N}\}\}$ .... $\{\varnothing, \{\mathbb{N}\}\}$ kümesinde listelenen ikinci eleman $\{\mathbb{N}\}$'dir.
20. $\{(1,2),(2,2),(7,1)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .... $(1,2),(2,2),(7,1)$ sıralı ikililerinin her biri $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$'dedir.

Altküme kavramını anlamanıza yardım eden yukarıdaki örnekler biraz yapaydır. Genellikle altkümeler doğal bir şekilde ortaya çıkar. Örneğin $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ birim çemberini ele alalım. Bu küme $\mathbb{R}^2$ düzleminin bir altkümesidir. Benzer şekilde bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $G = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ ile verilen noktalar kümesidir ve $G \subseteq \mathbb{R}^2$ olur. C ve G gibi kümeler, $\mathbb{R}^2$'nin birer altkümesi olarak düşünüldüğünde daha kolay anlaşılır veya zihinde canlandırılabilir. Matematik, bir kümeyi başka bir kümenin altkümesi olarak görmenin önemli olduğu örneklerle doludur.

Alıştırmalar

A. Aşağıdaki kümelerin bütün altkümelerini yazınız.

1. $\{1, 2, 3, 4\}$
2. $\{1, 2, \varnothing\}$
3. $\{\{\mathbb{R}\}\}$
4. $\varnothing$
5. $\{\varnothing\}$
6. $\{\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}\}$
7. $\{\mathbb{R}, \{\mathbb{Q}, \mathbb{N}\}\}$
8. $\{\{0, 1\}, \{0, 1, \{2\}\}, \{0\}\}$

B. Aşağıdaki kümeleri listeleme yöntemi ile ifade ediniz.

9. $\{X : X \subseteq \{3, 2, a\}$ ve $|X| = 2\}$
10. $\{X \subseteq \mathbb{N} : |X| \leqslant 1\}$
11. $\{X : X \subseteq \{3, 2, a\}$ ve $|X| = 4\}$
12. $\{X : X \subseteq \{3, 2, a\}$ ve $|X| = 1\}$

C. Aşağıdaki ifadelerin doğru ya da yanlış olduğunu belirleyiniz ve bunun nedenini açıklayınız.

13. $\mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$
14. $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$
15. $\{(x, y) : x-1 = 0\} \subseteq \{(x, y) : x^2-x = 0\}$
16. $\{(x, y) : x^2-x = 0\} \subseteq \{(x, y) : x-1 = 0\}$

1.4 Kuvvet Kümesi

Bir küme verildiğinde, aşağıda tanımlanan *kuvvet kümesi* işlemiyle yeni bir küme oluşturabilirsiniz.

Tanım 1.4. *Bir A kümesinin* ***kuvvet kümesi*** *$\mathcal{P}(A)$ ile gösterilir ve A'nın bütün altkümelerinin kümesi olarak tanımlanır. Sembolik olarak $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ yazılır.*

Örneğin $A = \{1, 2, 3\}$ kümesinin kuvvet kümesi, A'nın bütün altkümelerinden oluşan kümedir. Önceki bölümde bu altkümelerin nasıl bulunacağını öğrendik. Bunlar $\{\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ ve $\{1, 2, 3\}$ kümeleridir. Bu nedenle A'nın kuvvet kümesi

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{2, 3\},\ \{1, 2, 3\}\}$$

ile verilir.

Bir önceki bölümde gördüğümüz üzere, n tane elemanı olan sonlu bir kümenin 2^n adet altkümesi vardır. Bu nedenle kuvvet kümesinin 2^n tane elemanı vardır.

Gözlem 1.4. *Eğer A kümesi sonlu ise $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ olur.*

Örnek 1.4. Aşağıdaki önermeleri inceleyiniz ve cevapların nasıl elde edildiğini anladığınızdan emin olunuz. Her durumda $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ eşitliğinin doğru olduğuna özellikle dikkat ediniz.

1. $\mathcal{P}(\{0,1,3\}) = \{\, \varnothing, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,3\}, \{1,3\}, \{0,1,3\}\,\}$
2. $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\, \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\,\}$
3. $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\, \varnothing, \{1\}\,\}$
4. $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\, \varnothing\,\}$
5. $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\, \varnothing, \{a\}\,\}$
6. $\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\, \varnothing, \{\varnothing\}\,\}$
7. $\mathcal{P}(\{a\}) \times P(\{\varnothing\}) = \{\, (\varnothing,\varnothing), (\varnothing,\{\varnothing\}), (\{a\},\varnothing), (\{a\},\{\varnothing\})\,\}$
8. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\varnothing\})) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\,\}$
9. $\mathcal{P}(\{1,\{1,2\}\}) = \{\, \varnothing, \{1\}, \{\{1,2\}\}, \{1,\{1,2\}\}\,\}$
10. $\mathcal{P}(\{\mathbb{Z},\mathbb{N}\}) = \{\, \varnothing, \{\mathbb{Z}\}, \{\mathbb{N}\}, \{\mathbb{Z},\mathbb{N}\}\,\}$

Sıradaki önermeler **yanlıştır**. Bunların neden yanlış olduğunu belirlemeye çalışarak sağ taraftaki açıklamaları anladığınızdan emin olunuz.

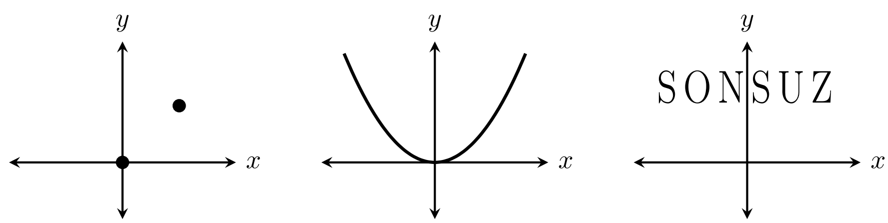
11. $\mathcal{P}(1) = \{\, \varnothing, \{1\}\,\}$ .... bu anlamsızdır çünkü 1 küme değildir.
12. $\mathcal{P}(\{1,\{1,2\}\}) = \{\, \varnothing, \{1\}, \{1,2\}, \{1,\{1,2\}\}\,\}$ ....$\{1,2\} \nsubseteq \{1,\{1,2\}\}$ olduğu için yanlıştır.
13. $\mathcal{P}(\{1,\{1,2\}\}) = \{\, \varnothing, \{\{1\}\}, \{\{1,2\}\}, \{\varnothing,\{1,2\}\}\,\}$ ....$\{\{1\}\} \nsubseteq \{1,\{1,2\}\}$ olduğu için yanlıştır.

Eğer A sonlu ise $\mathcal{P}(A)$ kümesini, yukarıdaki örnekte yapıldığı gibi, listelemek mümkündür (ancak bu pratik olmayabilir). Eğer A sonsuz ise bu mümkün değildir. Örneğin, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ kümesini ele alalım. Bu kümenin elemanlarını yazmaya başladığınızda $\mathbb{N}$ kümesinin sonsuz sayıda altkümeye sahip olduğunu çok hızlı bir şekilde görebilirsiniz. Ancak bu altkümelerin hangi örüntüye göre sıralanacağı (ya da bunun mümkün olup olmadığı) belli değildir:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{\, \varnothing, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{1,2\}, \{1,3\}, \ldots, \{39,47\}\,,\\ \ldots, \{3,87,131\}, \ldots, \{2,4,6,8\}, \ldots ? \ldots\}\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ kümesi ise oldukça kafa karıştırıcıdır. Bunu görmek için $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$ kümesini, kartezyen düzlem üzerindeki bütün noktaların kümesi olarak düşünelim. $\mathbb{R}^2$'nin bir altkümesi (yani $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$'nin bir elemanı) düzlemdeki bazı noktaların bir kümesidir. Bunlardan bazılarına bakalım.

Örneğin, $\{(0,0),(1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ olduğundan $\{(0,0),(1,1)\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ olacağını biliyoruz. Şekil 1.4(a)'da olduğu gibi, bu altkümenin şeklini bile çizebiliriz. Başka bir örnek olarak $G = \{(x,x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesini yani $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğini ele alalım. Bu küme $\mathbb{R}^2$'nin bir altkümesi olduğundan $G \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ olur. Şekil 1.4(b) bu kümeyi gösterir. Bu iş herhangi bir fonksiyon için yapılabileceğinden, akla gelebilecek her $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$'nin bir elemanıdır.



(a) (b) (c)

Şekil 1.4: $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ kuvvet kümesininde çok ama çok küme vardır

Aslında, düzlem üzerindeki siyah-beyaz herhangi bir resim $\mathbb{R}^2$'nin bir altkümesi olarak düşünülebilir. Buradaki siyah noktalar altkümeye dahildir fakat beyaz noktalar dahil değildir. Dolayısıyla Şekil 1.4(c)'de verilen "SONSUZ" yazısı $\mathbb{R}^2$'nin bir altkümesidir ve bu nedenle $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$'nin bir elemanıdır. Aynı sebepten dolayı $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ şu an okuduğunuz sayfanın bir kopyasını içerir.

Akla gelebilecek her fonksiyonu ve her siyah-beyaz resmi içermenin yanı sıra, $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ şu ana kadar yazılmış olan kitapları, yazılacak olan kitapları ve hiçbir zaman yazılmayacak kitapları içerir. $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ kümesinin içinde, hayatınızın başından sonuna kadar, sizin ve henüz daha doğmamış torunlarınızın detaylı biyografileri bulunmaktadır. Sadece beş tane sembol kullanılarak yazılan $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$'nin akıl almaz büyüklükte bir kümeyi ifade etmesi şaşırtıcıdır.

Ödev: $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2))$ kümesini hayal ediniz.

Alıştırmalar

A. Aşağıda istenilen kümeleri bulunuz.

1. $\mathcal{P}(\{\{a,b\},c\})$
2. $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$
3. $\mathcal{P}(\{\{\varnothing\},5\})$
4. $\mathcal{P}(\{\mathbb{R},\mathbb{Q}\})$
5. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{2\}))$
6. $\mathcal{P}(\{1,2\}) \times \mathcal{P}(\{3\})$
7. $\mathcal{P}(\{a,b\}) \times \mathcal{P}(\{0,1\})$
8. $\mathcal{P}(\{1,2\} \times \{3\})$
9. $\mathcal{P}(\{a,b\} \times \{0\})$
10. $\{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3\}) : |X| \leqslant 1\}$
11. $\{X \subseteq \mathcal{P}(\{1,2,3\}) : |X| \leqslant 1\}$
12. $\{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3\}) : 2 \in X\}$

B. Kabul edelim ki $|A| = m$ ve $|B| = n$ olsun. Aşağıdaki kardinaliteleri hesaplayınız.

13. $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))|$
14. $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))|$
15. $|\mathcal{P}(A \times B)|$
16. $|\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)|$
17. $|\{X \in \mathcal{P}(A) : |X| < 1\}|$
18. $|\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(B))|$
19. $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \times \varnothing)))|$
20. $|\{X \subseteq \mathcal{P}(A) : |X| < 1\}|$

1.5 Birleşim, Kesişim, Fark

Sayılar; toplama, çıkarma ve çarpma gibi işlemlere tabi tutularak başka sayılar elde edilebilir. Benzer şekilde kümelere uygulanabilecek çeşitli işlemler vardır. Örneğin, (Bölüm 1.2'de tanımlanan) kartezyen çarpım işlemi bunlardan biridir. Herhangi A ve B kümelerine kartezyen çarpım işlemi uygulandığında, $A \times B$ ile gösterilen yeni bir küme elde edilebilir. Şimdi kümeler üzerinde tanımlanan birleşim, kesişim ve fark işlemlerini verelim.

Tanım 1.5. *A ve B iki küme olsun.*

- *A ve B kümelerinin* ***birleşimi****, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B\}$ kümesidir.*
- *A ve B kümelerinin* ***kesişimi****, $A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}$ kümesidir.*
- *A kümesinin B kümesinden* ***farkı****, $A - B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$ kümesidir.*

Sözel olarak ifade edecek olursak $A \cup B$ kümesi, A'da veya B'de (ya da her ikisinde birden) olan tüm nesnelerin kümesidir. $A \cap B$ kümesi, hem A'da hem de B'de olan bütün nesnelerin kümesidir. $A - B$ kümesi ise A da olan fakat B'de olmayan tüm elemanların kümesidir.

Örnek 1.5. Kabul edelim ki $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f\}$ ve $C = \{1, 2, 3\}$ olsun.

1. $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$
2. $A \cap B = \{d, e\}$
3. $A - B = \{a, b, c\}$
4. $B - A = \{f\}$
5. $(A - B) \cup (B - A) = \{a, b, c, f\}$
6. $A \cup C = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3\}$

7. $A \cap C = \varnothing$

8. $A - C = \{a, b, c, d, e\}$

9. $(A \cap C) \cup (A - C) = \{a, b, c, d, e\}$

10. $(A \cap B) \times B = \{(d, d), (d, e), (d, f), (e, d), (e, e), (e, f)\}$

11. $(A \times C) \cap (B \times C) = \{(d, 1), (d, 2), (d, 3), (e, 1), (e, 2), (e, 3)\}$

Görüleceği üzere her X ve Y kümesi için, $X \cup Y = Y \cup X$ ve $X \cap Y = Y \cap X$ ifadeleri daima doğrudur ancak genel olarak $X - Y \neq Y - X$ olur.

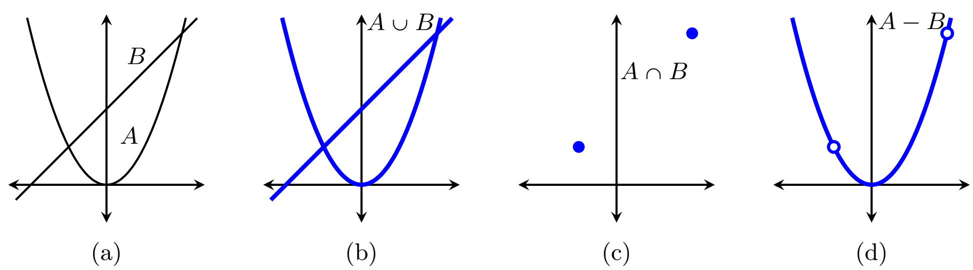
Örneklerimize devam edelim. Aşağıda, $12 - 15$ arasında verilen örnekler Bölüm 1.1'de ele alınan aralık notasyonunu kullanır. Böylece örneğin, $[2, 5] = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leqslant x \leqslant 5\}$ vb. olur. Bu örnekleri sayı doğrusu üzerinde çizmek, onlarını anlamanıza yardımcı olabilir.

12. $[2, 5] \cup [3, 6] = [2, 6]$

13. $[2, 5] \cap [3, 6] = [3, 5]$

14. $[2, 5] - [3, 6] = [2, 3)$

15. $[0, 3] - [1, 2] = [0, 1) \cup (2, 3]$



Şekil 1.5: A kümesinin B kümesi ile birleşimi, kesişimi ve farkı

Örnek 1.6. $A = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi $y = x^2$ fonksiyonunun grafiği ve $B = \{(x, x + 2) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi de $y = x + 2$ fonksiyonunun grafiği olsun. Bu kümeler $\mathbb{R}^2$'nin birer altkümesidir. Bunlar, Şekil 1.5(a)'da aynı düzlem üzerinde çizilmiştir. Şekil 1.5(b), $A \cup B$ kümesini yani grafiklerden biri (ya da her ikisi) üzerinde olan bütün (x, y) sıralı ikililerinin kümesini gösterir. Şekil 1.5(c)'de gösterildiği üzere $A \cap B = \{(-1, 1), (2, 4)\}$ kümesi, bu grafiklerin kesiştiği iki noktadan oluşur. Şekil 1.5(d), A kümesininden B ile kesiştiği noktaların çıkarıması ile elde edilen $A - B$ kümesinin grafiğini gösterir. Ortak eleman yöntemi kullanıldığında, $A \cup B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = x^2 \text{ veya } y = x + 2\}$ ve $A - B = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}\}$ yazılabilir.

Alıştırmalar

1. $A = \{4, 3, 6, 7, 1, 9\}$, $B = \{5, 6, 8, 4\}$ ve $C = \{5, 8, 4\}$ olsun. Aşağıdaki kümeleri bulunuz.

   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap B$
   (c) $A - B$
   (d) $A - C$
   (e) $B - A$
   (f) $A \cap C$
   (g) $B \cap C$
   (h) $B \cup C$
   (i) $C - B$

2. $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ ve $C = \{2, 8, 4\}$ olsun. Aşağıdaki kümeleri bulunuz.

   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap B$
   (c) $A - B$
   (d) $A - C$
   (e) $B - A$
   (f) $A \cap C$
   (g) $B \cap C$
   (h) $C - A$
   (i) $C - B$

3. $A = \{0, 1\}$ ve $B = \{1, 2\}$ olsun. Aşağıdaki kümeleri bulunuz.

   (a) $(A \times B) \cap (B \times B)$
   (b) $(A \times B) \cup (B \times B)$
   (c) $(A \times B) - (B \times B)$
   (d) $(A \cap B) \times A$
   (e) $(A \times B) \cap B$
   (f) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
   (g) $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$
   (h) $\mathcal{P}(A \cap B)$
   (i) $\mathcal{P}(A \times B)$

4. $A = \{b, c, d\}$ ve $B = \{a, b\}$ olsun. Aşağıdaki kümeleri bulunuz.

   (a) $(A \times B) \cap (B \times B)$
   (b) $(A \times B) \cup (B \times B)$
   (c) $(A \times B) - (B \times B)$
   (d) $(A \cap B) \times A$
   (e) $(A \times B) \cap B$
   (f) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
   (g) $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$
   (h) $\mathcal{P}(A \cap B)$
   (i) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

5. $X = [1, 3] \times [1, 3]$ ve $Y = [2, 4] \times [2, 4]$ kümelerini $\mathbb{R}^2$ düzleminde çiziniz. Daha sonra, farklı bir grafik üzerinde $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X - Y$ ve $Y - X$ kümelerini tarayınız. (Yol Gösterme: X ve Y kümeleri, kapalı aralıkların kartezyen çarpımıdır. Bölüm 1.2'deki alıştırmalara bir göz atarak, $[1, 3] \times [1, 3]$ gibi kümelerin grafiklerinin nasıl çizildiğini tekrar etmek fayadalı olabilir.)

6. $X = [-1, 3] \times [0, 2]$ ve $Y = [0, 3] \times [1, 4]$ kümelerini $\mathbb{R}^2$ düzleminde çiziniz. Daha sonra, farklı bir grafik üzerinde $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X - Y$ ve $Y - X$ kümelerini tarayınız.

7. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ ve $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0\}$ kümelerini $\mathbb{R}^2$ düzleminde çiziniz. Daha sonra, farklı bir grafik üzerinde $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X - Y$ ve $Y - X$ kümelerini tarayınız.

8. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ ve $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant y \leqslant 0\}$ kümelerini $\mathbb{R}^2$ düzleminde çiziniz. Daha sonra, farklı bir grafik üzerinde $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X - Y$ ve $Y - X$ kümelerini tarayınız.

9. $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ifadesi doğru mudur? $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ifadesi hakında ne dersiniz?

10. $(\mathbb{R} - \mathbb{Z}) \times \mathbb{N} = (\mathbb{R} \times \mathbb{N}) - (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ ifadesi doğru mudur yoksa yanlış mıdır? Açıklayınız.

1.6 Tümleyen

Bu bölümde, kümeler üzerinde *tümleyen* adı verilen başka bir işlem tanıtılacaktır. Bu tanım, birazdan açıklayacağımız *evrensel küme* kavramına dayanır.

Bir küme üzerinde çalışırken, neredeyse her zaman, onu daha büyük bir kümenin altkümesi olarak görürüz. Örneğin, $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ asal sayılar kümesini ele alalım. Eğer bizden P kümesinde olmayan bazı nesneleri söylememiz istenseydi, cevap olarak 4, 6 ya da 423 gibi bazı bileşik sayıları verebilirdik. Muhtemelen, Vladimir Putin P kümeside değildir diye bir cevap vermezdik. Gerçekten de Vladimir Putin bu kümede değilir ancak o bir asal sayının ne olup olmadığı tartışmasının tamamen dışındadır. Aslında burada belirtilmemiş olsa da

$$P \subseteq \mathbb{N}$$

varsayımı yaparız çünkü asal sayılarıdan söz edebilmek için en doğal ortamı $\mathbb{N}$ kümesi sunmaktadır. Bu açıdan baktığımızda P kümesinde olmayan herhangi bir nesne, $\mathbb{N}$'de olmalıdır. Burada daha büyük olan $\mathbb{N}$ kümesine P için bir **evrensel küme** denir.

Matematikte, işe yarayan her kümenin doğal bir evrensel kümesinin var olduğu kabul edilir. Örneğin, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ ile verilen birim çemberi ele alalım. Bu kümenin bütün elemanları $\mathbb{R}^2$ düzlemi üzerindedir. Bu nedenle $\mathbb{R}^2$ doğal bir şekilde C kümesinin evrensel kümesi olarak düşünülebilir. Özellikle belirtilmediği sürece, bir A kümesinin evrensel kümesi E ile gösterilir. Artık tümleyen işlemini tanımlayabiliriz.

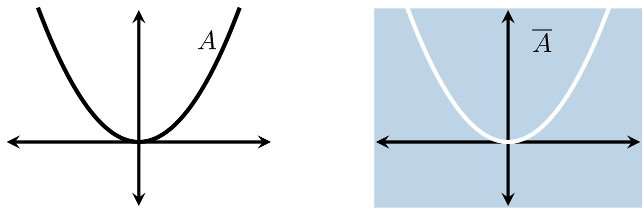
Tanım 1.6. *Evrensel kümesi E olan bir A kümesi verilsin. A kümesinin **tümleyeni** $\overline{A}$ ile gösterilir ve $\overline{A} = E - A$ olarak tanımlanır.*

Örnek 1.7. Eğer asal sayılar kümesi P ile gösterilirse

$$\overline{P} = \mathbb{N} - P = \{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, \dots\}$$

olur. Buna göre $\overline{P}$ kümesi bileşik sayılar ve 1'den oluşur.

Örnek 1.8. $A = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğidir. Şekil 1.6(a), bu kümeyi kendi evrensel kümesi olan $\mathbb{R}^2$ içinde göstermektedir. A kümesinin tümleyeni, 1.6(b)'de taranarak verilen $\overline{A} = \mathbb{R}^2 - A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x^2\}$ kümesidir.



(a) (b)

Şekil 1.6: Bir küme ve tümleyeni

Alıştırmalar

1. $A = \{4, 3, 6, 7, 1, 9\}$ ve $B = \{5, 6, 8, 4\}$ kümelerinin evrensel kümesi $E = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ olsun. Aşağıdaki kümeleri bulunuz.

   (a) $\overline{A}$ (d) $A \cup \overline{A}$ (g) $\overline{A} - \overline{B}$
   (b) $\overline{B}$ (e) $A - \overline{A}$ (h) $\overline{A} \cap B$
   (c) $A \cap \overline{A}$ (f) $A - \overline{B}$ (i) $\overline{A \cap B}$

2. $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ve $B = \{1, 3, 5, 7\}$ kümelerinin evrensel kümesi $E = \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$ olsun. Aşağıdaki kümeleri bulunuz.

   (a) $\overline{A}$ (d) $A \cup \overline{A}$ (g) $\overline{A} \cap \overline{B}$
   (b) $\overline{B}$ (e) $A - \overline{A}$ (h) $\overline{A \cap B}$
   (c) $A \cap \overline{A}$ (f) $\overline{A \cup B}$ (i) $\overline{A} \times B$

3. $X = [1, 3] \times [1, 2]$ kümesini $\mathbb{R}^2$ düzlemi üzerinde gösteriniz. Farklı bir grafik üzerinde $\overline{X}$ ve $\overline{X} \cap ([0, 2] \times [0, 3])$ kümelerini tarayınız.

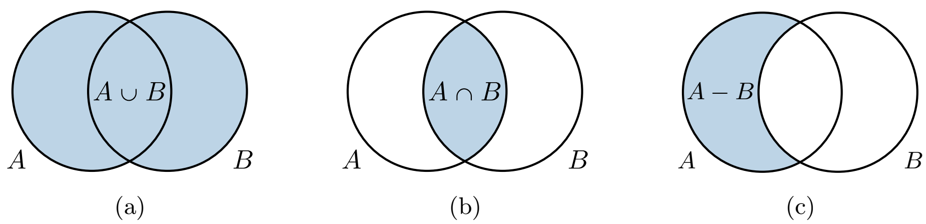
4. $X = [-1, 3] \times [0, 2]$ kümesini $\mathbb{R}^2$ düzlemi üzerinde gösteriniz. Farklı bir grafik üzerinde $\overline{X}$ ve $\overline{X} \cap ([-2, 4] \times [-1, 3])$ kümelerini tarayınız.

5. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ kümesini $\mathbb{R}^2$ düzlemi üzerinde gösteriniz. Farklı bir grafik üzerinde $\overline{X}$ kümesini tarayınız.

6. $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2 + y^2\}$ kümesini $\mathbb{R}^2$ üzerinde gösteriniz. $\overline{X}$ kümesini tarayınız.

1.7 Venn Diyagramları

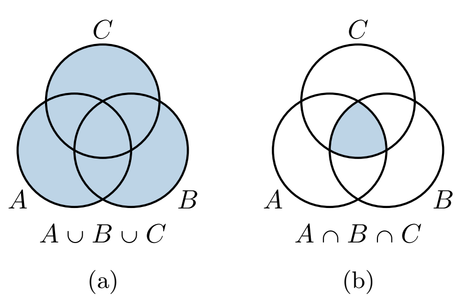
Kümeler üzerinde çalışırken, şematik diyagramlar kullanmak bazen faydalı olabilir. Bunu yaparken, kümeyi genellikle bir daire (ya da oval) ile temsil eder ve bunun kümedeki bütün elemanları kapsadığını düşünürüz. Bu diyagramlar, kümelerin çeşitli işlemler altında nasıl bir araya getirileceğini gösterir. Örneğin Şekil 1.7(a-c), verilen A ve B kümelerinin ortadaki bölgede örtüştüklerini gösterir. Burada $A\cup B$, $A\cap B$ ve $A-B$ kümeleri taranmıştır. Kümelerin bu biçimdeki şematik gösterimlerine **Venn diyagramları** denir. Bu diyagramlar, isimlerini onları keşfeden İngiliz mantık bilimcisi John Venn'den (1834-1923) almıştır.



Şekil 1.7: İki küme için Venn diyagramları

Venn diyagramlarını herhangi bir teorem ispatının bir parçası olarak kullanmanız pek de olası değildir. Ancak kümelerin kombinasyonlarını anlamak, belirli problemleri çözmek için stratejiler geliştirmek ya da belirli teoremleri ispatlamak için Venn diyagramlarının çok kullanışlı "karalama yapma araçları" olduğunu göreceksiniz. Bu bölümün geri kalan kısmında, Venn diyagramlarını kullanarak üç tane kümenin $\cup$ ve $\cap$ işlemleri altındaki kombinasyonlarını araştıracağız.

İlk önce $A \cup B \cup C$ kümesiyle başlayalım. Kümelerdeki birleşim tanımı, bu kümenin A, B ve C kümelerinden birinde ya da birden fazlasında bulunan tüm elemanlardan oluşması gerektiğini önerir. Şekil 1.8(a), bu kümeye ait Venn diyagramını göstermektedir. Benzer şekilde $A \cap B \cap C$ kümesini A, B ve C kümelerinin herbirine ortak olan tüm elemanların kümesi olarak düşünürüz. Böylece, her üç kümeye de ait olan bölge Şekil 1.8(b)'de taranmıştır.

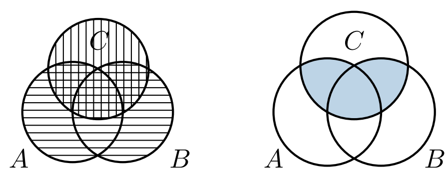


Şekil 1.8: Üç küme için Venn diyagramları

Aslında $A \cap B \cap C$ kümesini iki adımlı $(A \cap B) \cap C$ işlemi olarak düşünebiliriz. Burada, $A \cap B$ kümesi hem A hem de B için ortak olan bölgeyle temsil edilir ve *bunu* C ile kesiştirdiğimizde Şekil 1.8(b)'de taranan bölgeyi elde ederiz. Bu, $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$ eşitliğinin görsel bir ispatıdır. Benzer şekilde $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$ ve $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ olduğu görülebilir.

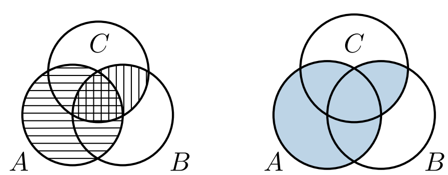
Yukarıdaki örneklerin $\cup$ ve $\cap$ sembollerinden sadece bir tanesini içerdiğine dikkat ediniz. Bu ifadeler parantezlerden bağımsızdır ve onlar kullanılmasa da olur. Bunlar, cebirde karşımıza çıkan $(a + b) + c = a + (b + c)$ veya $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ifadelerine benzer. Bu tür ifadeleri parantez kullanmadan kısaca $a + b + c$ veya $a \cdot b \cdot c$ biçiminde yazarız. Buna karşılık, $(a + b) \cdot c$ ve $a + (b \cdot c)$ ifadeleri eşit olmadıkları için $(a + b) \cdot c$ gibi bir ifadede parantez kullanmak kesinlikle gereklidir.

Şimdi, $\cup$ ve $\cap$ işlemlerini aynı anda içeren $(A \cup B) \cap C$ ve $A \cup (B \cap C)$ kümelerini anlamak için Venn diyagramlarını kullanalım. Şekil 1.9'da $(A \cup B) \cap C$ kümesi için bir Venn diyagramının nasıl çizileceği gösterilmiştir. Sol taraftaki çizimde $A \cup B$ yatay çizgilerle, C ise düşey çizgilerle taranmıştır. Buna göre $(A \cup B) \cap C$ kümesi, $A \cup B$ ile C kümelerinin çakıştığı bölgedeki kareli çizgilerle taranan bölgedir. Sağ taraftaki çizimde, gereksiz taralı alanlar göz ardı edilerek $(A \cup B) \cap C$ kümesi gösterilmiştir.



Şekil 1.9: $(A \cup B) \cap C$ için Venn diyagramının oluşturulması

Şimdi $A \cup (B \cap C)$ kümesini ele alalım. Şekil 1.10'da, A kümesi yatay ve $B \cap C$ kümesi de düşey çizgilerle taranmıştır. Bu iki kümenin birleşimi olan $A \cup (B \cap C)$ kümesi, sağda taraftaki taralı bölge ile temsil edilmiştir.



Şekil 1.10: $A \cup (B \cap C)$ için Venn diyagramının oluşturulması

Şekil 1.9 ve 1.10'da verilen $(A \cup B) \cap C$ ve $A \cup (B \cap C)$ kümelerinin diyagramlarını karşılaştıralım. Bu diyagramların farklı olması, genel olarak $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$ olduğunu gösterir. Bu nedenle $A \cup B \cap C$ gibi bir ifade tartışmasız bir şekilde anlamsızdır çünkü bunun $(A \cup B) \cap C$ kümesi mi yoksa $A \cup (B \cap C)$ kümesi mi olduğu belirsizdir. Özetleyecek olursak, Venn diyagramları aşağıdakileri anlamamıza yardımcı olmuştur.

Önemli Noktalar:

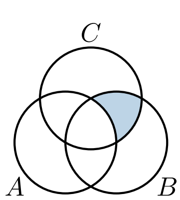
- Kümeleri içeren bir ifade sadece $\cup$ işlemini içeriyorsa parantez kullanımı isteğe bağlıdır.
- Kümeleri içeren bir ifade sadece $\cap$ işlemini içeriyorsa parantez kullanımı isteğe bağlıdır.
- Eğer bir ifade hem $\cup$ hem de $\cap$ sembollerini içeriyorsa parantez kullanımı gereklidir.

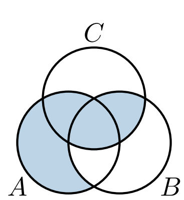
Bir sonraki bölümde, $\cup$ ya da $\cap$ işlemlerinden sadece bir tanesini kullanan ifadelere odaklanacağız. Bu nedenle, o ifadelerde parantez kullanmak gerekmeyecektir.

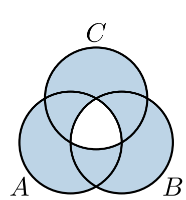
Alıştırmalar

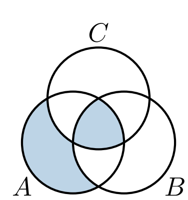
1. $\overline{A}$ kümesi için bir Venn diyagramı çiziniz.
2. $B - A$ kümesi için bir Venn diyagramı çiziniz.
3. $(A - B) \cap C$ kümesi için bir Venn diyagramı çiziniz.
4. $(A \cup B) - C$ kümesi için bir Venn diyagramı çiziniz.
5. $A \cup (B \cap C)$ ve $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ kümeleri için birer Venn diyagramı çiziniz. Bu çizimlere dayanarak $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olup olmaması konusunda ne dersiniz?
6. $A \cap (B \cup C)$ ve $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ kümeleri için birer Venn diyagramı çiziniz. Bu çizimlere dayanarak $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olup olmaması konusunda ne dersiniz?
7. A ve B kümelerinin evrensel kümesi E olsun. $\overline{A \cap B}$ ve $\overline{A} \cup \overline{B}$ kümeleri için birer Venn diyagramı çiziniz Bu çizimlere dayanarak $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ olup olmaması konusunda ne dersiniz?
8. A ve B kümelerinin evrensel kümesi E olsun. $\overline{A \cup B}$ ve $\overline{A} \cap \overline{B}$ kümeleri için birer Venn diyagramı çiziniz. Bu çizimlere dayanarak $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ olup olmaması konusunda ne dersiniz?
9. $(A \cap B) - C$ kümesi için bir Venn diyagramı çiziniz.
10. $(A - B) \cup C$ kümesi için bir Venn diyagramı çiziniz.

Aşağıda A, B ve C kümelerini içeren Venn diyagramları verilmiştir. Bu diyagramlara karşılık gelen ifadeleri yazınız.

11. 

12. 

13. 

14. 

1.8 İndislenmiş Kümeler

Çok sayıda küme içeren matematik problemlerinde, kümeleri kolay bir şekilde takip edebilmek için sıklıkla alt indisler kullanılır. Buna göre üç tane kümeyi A, B ve C yerine A_1, A_2 ve A_3 sembolleri ile gösterebiliriz. Bu türdeki kümelere **indislenmiş kümeler** denir.

Her ne kadar birleşim ve kesişim işlemlerini iki tane küme için tanımlamış olsak da artık bunları üç veya daha fazla kümeye zorlanmadan uygulayabilmeniz gerekir. (Örneğin önceki bölümde, üç kümenin kesişimi ve birleşimi için Venn diyagramlarını çizdiğimizi hatırlayınız.) Şimdi tanımları dikkatli bir şekilde yapabilmek için biraz vakit ayıralım. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümeleri verildiğinde $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ kümesi, A_i kümelerinden en az birinde olan bütün nesnelerden oluşmalıdır. Benzer şekilde $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n$ kümesi, A_i kümelerinin hepsinde ortak olarak bulunan bütün nesnelerden oluşmalıdır. Buna göre dikkatli bir şekilde yapılmış şu tanımı verebiliriz.

Tanım 1.7. *$A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümeleri verildiğinde*

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n = \{x : 1 \leqslant i \leqslant n \text{ olmak üzere en az bir } A_i \text{ için } x \in A_i\},$$
$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n = \{x : 1 \leqslant i \leqslant n \text{ olmak üzere her } A_i \text{ için } x \in A_i\},$$

olarak tanımlanır.

Kümelerin sayısı çok büyük olduğunda, yukarıdaki ifadeler karmaşık bir hâl alır. Bu düzensizliği aşmak için toplam sembolüne benzer bir notasyon kullanabiliriz. Bildiğiniz üzere toplam sembolü, birçok sayı içeren bir toplamı göstermekte kullanılan pratik bir notasyondur. Daha açık bir ifadeyle a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_n$ sayıları verildiğinde,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

yazılır. Verilen sayıların sayısı sonsuz olsa bile aşağıdaki ifade anlamlıdır:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_i + \cdots$$

Şimdi kullanacağımız notasyon buna çok benzer: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ kümeleri verildiğinde

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \qquad \text{ve} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n$$

olarak tanımlayabiliriz.

Örnek 1.9. Kabul edelim ki $A_1 = \{0, 2, 5\}$, $A_2 = \{1, 2, 5\}$ ve $A_3 = \{2, 5, 7\}$ olsun. Buna göre

$$\bigcup_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{0, 1, 2, 5, 7\} \qquad \text{ve} \qquad \bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2, 5\}$$

olduğu görülebilir.

Bu notasyon $A_1, A_2, A_3, \ldots$ kümeleri sonsuz sayıda olduğunda da kullanılabilir:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots = \{x : 1 \leqslant i \text{ olmak üzere en az bir } A_i \text{ için } x \in A_i\},$$
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots = \{x : 1 \leqslant i \text{ olmak üzere her } A_i \text{ için } x \in A_i\}.$$

Örnek 1.10. Aşağıda, sonsuz sayıda küme verilmiştir:

$$A_1 = \{-1, 0, 1\}, \quad A_2 = \{-2, 0, 2\}, \quad A_3 = \{-3, 0, 3\}, \quad \ldots, \quad A_i = \{-i, 0, i\}, \quad \ldots$$

Dikkat edilirse $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{Z}$ ve $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{0\}$ olduğu görülebilir.

Bu notasyonun kullanışlı bir biçimi de şu şekildedir: $i = 1, 2, 3$ olmak üzere A_i kümelerinin birleşimi için

$$\bigcup_{i=1}^{3} A_i = \bigcup_{i \in \{1,2,3\}} A_i$$

yazabiliriz. Benzer şekilde

$$\bigcap_{i=1}^{3} A_i = \bigcap_{i \in \{1,2,3\}} A_i, \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \qquad \text{ve} \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

olur. Burada i indisi $\{1, 2, 3\}$ veya $\mathbb{N}$ gibi bir kümenin elemanı olmak üzere, A_i kümelerinden oluşan bir koleksiyonunun birleşimi veya kesişimi alınmaktadır. Genelleyecek olursak, I olası bütün indislerin kümesi olmak üzere burada ele alınan küme koleksiyonu, her $i \in I$ için verilen A_i kümelerinden oluşur. I kümesi **indis kümesi** olarak adlandırılır.

Burada vurgulamak gerekirse I kümesi sadece tamsayılardan oluşmak zorunda değildir. (Örneğin, harfleri veya reel sayıları alt indis olarak kullanabiliriz.) Programlanmış bir şekilde, i sembolünü bir tamsayı olarak düşündüğümüz için notasyonda ufak bir değişiklik yapalım: I kümesinin bir elemanını i ile değil de α ile gösterelim. Böylece $\alpha \in I$ olmak üzere, A_α kümelerinden oluşan bir koleksiyonu göz önüne alarak ve aşağıdaki tanımı yapabiliriz.

Tanım 1.8. *Bir I indis kümesindeki her $\alpha \in I$ için A_α kümeleri verildiğinde,*

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \alpha \in I \text{ olmak üzere en az bir } A_\alpha \text{ için } x \in A_\alpha\},$$
$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x : \alpha \in I \text{ olmak üzere her } A_\alpha \text{ için } x \in A_\alpha\}$$

olarak tanımlanır.

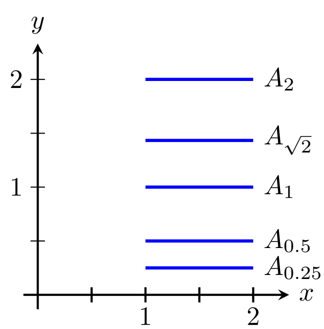
Örnek 1.11. Burada A_α kümeleri, $\mathbb{R}^2$'de birer altküme olacaktır. $I = [0,2] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ olsun. Her $\alpha \in I$ için $A_\alpha = \{(x, \alpha) : x \in \mathbb{R}, 1 \leqslant x \leqslant 2\}$ olarak tanımlayalım. Örneğin $\alpha = 1 \in I$ için $A_1 = \{(x, 1) : x \in \mathbb{R}, 1 \leqslant x \leqslant 2\}$ kümesi, Şekil 1.11(a)'da gösterildiği gibi, $x-$ekseninin bir birim yukarısında olan ve $x = 1$ ile $x = 2$ arasında uzanan yatay doğru parçasıdır. Benzer şekilde $A_2 = \{(x, 2) : x \in \mathbb{R}, 1 \leqslant x \leqslant 2\}$ kümesi, $x-$ekseninin iki birim yukarısında olan ve $x = 1$ ile $x = 2$ arasında uzanan yatay doğru parçasıdır. Diğer bir kaç A_α kümesi yine Şekil 1.11(a)'da gösterilmiştir ancak sonsuz sayıda $\alpha \in [0,2]$ olduğu için bu kümelerin hepsini çizmek mümkün değildir. Bu kümeler toplamda Şekil 1.11(b)'de verilen taralı bölgeyi kapsar yani bu bölge tüm A_α kümelerinin birleşimidir. Taralı bölge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\} = [1,2] \times [0,2]$ kümesi olduğu için

$$\bigcup_{\alpha \in [0,2]} A_\alpha = [1,2] \times [0,2]$$

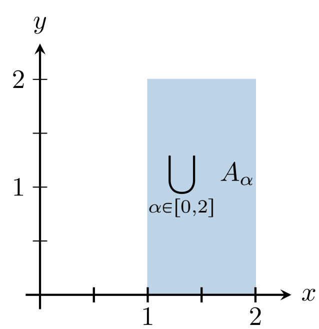
olur. Öbür yandan, A_α kümerinin tamamında ortak olarak bulunan bir (x, y) noktası olmadığı için

$$\bigcap_{\alpha \in [0,2]} A_\alpha = \varnothing$$

bulunur.



(a)



(b)

Şekil 1.11: İndislenmiş kümeler topluluğu birleşimi

Son bir yorum. Dikkat edilirse $A_\alpha = [1,2]\times\{\alpha\}$ olduğu görülebilir. Buna göre yukarıdaki ifadeler şu şekilde yazılabilir:

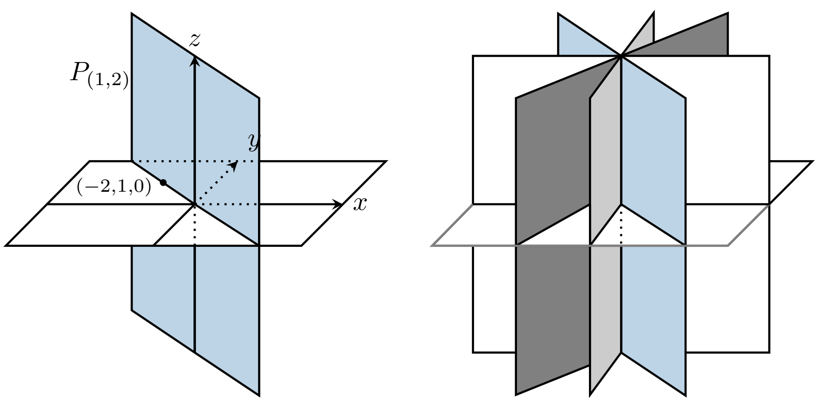
$$\bigcup_{\alpha\in[0,2]} [1,2]\times\{\alpha\} = [1,2]\times[0,2] \qquad \text{ve} \qquad \bigcap_{\alpha\in[0,2]} [1,2]\times\{\alpha\} = \varnothing.$$

Örnek 1.12. Bu örnekteki kümeler $\mathbb{R}^2$ tarafından indislenecektir. Herhangi bir $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ için $P_{(a,b)}$ kümesi

$$P_{(a,b)} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : ax+by=0\}$$

olarak tanımlansın. Bu küme, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir altkümesidir. Kelimelerle ifade edecek olursak, verilen bir $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ noktası için $P_{(a,b)}$ kümesi, $\mathbb{R}^3$ uzayında $ax+by=0$ denklemini sağlayan tüm noktaların kümesidir. Daha önce aldığınız matematik derslerden hatırlayacağınız üzere bu noktaların kümesi $\mathbb{R}^3$'de bir düzlem belirtir. O halde $P_{(a,b)}$ kümesi $\mathbb{R}^3$'de bir düzlemdir. Üstelik $z-$ekseni üzerindeki herhangi bir $(0,0,z)$ noktası otomatik olarak $ax+by=0$ denklemini sağlar. Böylece her bir $P_{(a,b)}$ kümesi $z-$eksenini içerir.

Şekil 1.12'nin sol tarafında, $P_{(1,2)} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2y=0\}$ kümesi verilmiştir. Bu küme, $xy-$düzlemini $x+2y=0$ doğrusunda kesen düşey düzlemdir.



Şekil 1.12: $P_{(a,b)}$ kümeleri $z-$eksenini içeren düşey düzlemlerdir

Orijinden farklı bir $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ noktası için $P_{(a,b)}$ kümesini, $xy-$düzlemini $ax+by=0$ doğrusunda kesen düşey düzlem olarak düşünebiliriz. Şekil 1.12'nin sağ tarafında birkaç $P_{(a,b)}$ kümesi gösterilmiştir. Bu şekildeki herhangi iki düzlem, $z-$ekseni boyunca kesişir. Üstelik, $z-$ekseni her $P_{(a,b)}$ kümesinin bir altkümesi olduğu için aşağıdaki eşitliğin doğruluğu açıktır:

$$\bigcap_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} P_{(a,b)} = \{(0,0,z) : z\in\mathbb{R}\} = \text{"}z-\text{ekseni"}.$$

Şimdi bu kümelerin birleşimlerine bakalım. Verilen her $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ noktası $P_{(-b,a)}$ kümesine aittir çünkü $(x,y,z) = (a,b,c)$ noktası $-bx+ay = 0$ denklemini sağlar. (Aslında, her (a,b,c) noktası $P_{(0,0)} = \mathbb{R}^3$ özel kümesine aittir ve bu küme, düzlem olmayan tek $P_{(a,b)}$ kümesidir.) O halde $\mathbb{R}^3$'teki herhangi bir nokta, bir $P_{(a,b)}$ kümesinin bir elemanıdır. Böylece aşağıdaki eşitlik açıktır:

$$\bigcup_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} P_{(a,b)} = \mathbb{R}^3 .$$

Alıştırmalar

1. $A_1 = \{a,b,d,e,g,f\}$, $A_2 = \{a,b,c,d\}$ ve $A_3 = \{b,d,a\}$ ve $A_4 = \{a,b,h\}$ olsun.

   (a) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{4} A_i =$ (b) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{4} A_i =$

2. Kabul edelim ki $A_1 = \{0,2,4,8,10,12,14,16,18,20,22,24\}$, $A_2 = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24\}$ ve $A_3 = \{0,4,8,12,16,20,24\}$ olsun.

   (a) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{3} A_i =$ (b) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{3} A_i =$

3. Her $n \in \mathbb{N}$ icin $A_n = \{0,1,2,3,\ldots,n\}$ olsun.

   (a) $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i =$ (b) $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i =$

4. Her $n \in \mathbb{N}$ icin $A_n = \{-2n, 0, 2n\}$ olsun.

   (a) $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i =$ (b) $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i =$

5. (a) $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} [i, i+1] =$ (b) $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}} [i, i+1] =$

6. (a) $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} [0, i+1] =$ (b) $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}} [0, i+1] =$

7. (a) $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \times [i, i+1] =$ (b) $\displaystyle\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \times [i, i+1] =$

8. (a) $\displaystyle\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} \{\alpha\} \times [0,1] =$ (b) $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in\mathbb{R}} \{\alpha\} \times [0,1] =$

9. (a) $\displaystyle\bigcup_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})} X =$ (b) $\displaystyle\bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N})} X =$

10. (a) $\displaystyle\bigcup_{x\in[0,1]} [x,1]\times[0,x^2] =$ (b) $\displaystyle\bigcap_{x\in[0,1]} [x,1]\times[0,x^2] =$

11. İndis kümesi I olan A_α kümelerinin bir koleksiyonu için $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ ifadesi her zaman doğru mudur?

12. Eğer $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ ise A_α kümeleri arasındaki ilişki hakkında ne söylenebilir?

13. Eğer $J \neq \varnothing$ ve $J \subseteq I$ ise $\displaystyle\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ olur mu? $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$ hakkında ne dersiniz?

14. Eğer $J \neq \varnothing$ ve $J \subseteq I$ ise $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha$ olur mu? Açıklayınız.

1.9 Sayı Sistemi Olan Kümeler

Pratikte en çok karşımıza çıkan kümeler, genellikle özel yapılara ve niteliklere sahiptir. Örneğin $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri, bilindik sayı sistemleridir. Böyle bir küme verildiğinde, elemanlarından herhangi ikisi toplanarak (ya da çarpılarak vs.) aynı kümenin başka bir elemanı elde edilebilir. Bu işlemler hepimizin bildiği üzere değişme, birleşme ve dağılma özelliklerine sahiptir. Bu özellikler kullanılarak, denklemleri çözmek için standard cebirsel yöntemler geliştirilmiştir. Burada ispatlarla ilgilenmemize rağmen bu özellikleri ve teknikleri tanımlama, ispat etme ya da doğrulama gereksinimi duymayacağız. Bunları temel kurallar olarak kabul edip, yapacağımız çıkarımları bunların üzerine inşa edeceğiz.

Bunlara ek olarak $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinin elamanları üzerindeki doğal sıralamayı ispatlamadan doğru kabul edeceğiz. Böylece (örneğin) "$5 < 7$" ifadesinin ne anlama geldiğini anlayacak ancak bunu doğrulama ya da açıklama gereksinimi duymayacağız. Benzer şekilde eğer $x \leqslant y$ ve $a \neq 0$ ise a sayısının pozitif veya negatif olmasına bağlı olarak $ax \leqslant ay$ veya $ax \geqslant ay$ yazacağız.

Sayılardaki sıralamaya ilişkin kafamıza yerleşmiş olan düşücenin bize anlattığı başka bir şey de, $\mathbb{N}$ kümesinin boş olmayan herhangi bir altkümesinin bir en küçük elemana sahip olmasıdır. Başka bir deyişle eğer $A \subseteq \mathbb{N}$ ve $A \neq \varnothing$ ise A kümesinde, diğer bütün elemandan daha küçük olan bir $x_0 \in A$ vardır. (Bu elemanı bulmak için 1'den başlayın, eğer bu sayı kümede yok ise daha sonra sırasıyla 2, 3, 4 vb. sayılarını kontrol edin ve $x_0 \in A$ sayısını bulana kadar devam edin; bu sayı A kümesinin en küçük elemanıdır.) Benzer şekilde, bir b tamsayısı verildiğinde boş olmayan herhangi bir $A \subseteq \{b, b+1, b+2, b+3, ...\}$ altkümesinin en küçük elemanı vardır. Bu özellik, **iyi sıralama prensibi** olarak adlandırılır. Bu terimi hatırlamanıza gerek yoktur ancak bu basit ve sezgisel düşünceyi sıklıkla ispatlarda kullanacağımızın farkında olmalısınız.

İyi sıralama prensibi çok sıradan bir özellikmiş gibi görünebilir ancak pozitif tamsayılar kümesi $\mathbb{N}$ hakkında çok özel ve önemli bir şey söyler. Aslında aynı özellik pozitif reel sayılarda geçerli değildir. Örneğin, pozitif reel sayılardan oluşan $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin en küçük elemanı yoktur çünkü alacağımız her $x_0 = \frac{1}{n} \in A$ için, ondan daha küçük olan $\frac{1}{n+1}$ sayısı daima vardır.

İyi sıralama prensibinin sonuçlarından biri, (aşağıda göreceğimiz gibi) herhangi bir a tamsayısının sıfırdan farklı bir b tamsayısına bölünebilmesi ve bunun sonucunda bir q bölümü ile r kalanının elde edilmesidir. Örneğin, $a = 17$ tamsayısı $b = 3$ ile bölünerek $q = 5$ bölümü ve $r = 2$ kalanı elde edilir. Bu işlem, sembolik olarak $17 = 5 \cdot 3 + 2$ ya da genel olarak $a = qb + r$ şekilinde yazılır. Bu önemli gözlem **bölme algoritması** olarak adlandırılır.

Gözlem 1.5. *(Bölme Algoritması) Kabul edelim ki a ve b iki tamsayı ve $b > 0$ olsun. Bu durumda $a = qb + r$ ve $0 \leqslant r < b$ olacak şekilde q ve r tamsayıları vardır.*

Bölme algoritması, ispatını yapmadan doğru kabul edip kullanmanın hiçbir sakıncası yoktur. Ancak bu algoritma gerçekten de iyi sıralama prensibine dayanır. Bunun sebebi şudur: $b > 0$ olmak üzere, verilen a ve b tamsayı çifti için

$$A = \{a - xb : x \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant a - xb\} \subseteq \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

kümesini göz önüne alalım. (Örneğin, eğer $a = 17$ ve $b = 3$ ise $A = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots\}$ kümesi, 17 tamsayısına 3'ün katlarının eklenmesiyle elde edilen pozitif tamsayıların kümesidir. Dikkat edilirse bu kümenin en küçük elemanı, $17 \div 3$ işlemininden kalan $r = 2$ tamsayısıdır.) Genel olarak $A = \{a - xb : x \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant a - xb\}$ kümesinin en küçük elemanının r olduğunu kabul edelim. Buna göre $r = a - qb$ olacak şekilde $q \in \mathbb{Z}$ vardır ve buradan $a = qb + r$ yazılabilir. Üstelik $0 \leqslant r < b$ olmalıdır. Bunun nedeni şudur: $r \in A \subseteq \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ olması $0 \leqslant r$ olmasını gerektirir. Öbür yandan $r \geqslant b$ olamaz. Aksi halde $r - b = (a - qb) - b = a - (q + 1)b$ sayısı $a - xb$ formuna olduğu için A kümesinin bir elemanıdır ve r tamsayısından küçüktür. Ancak r özellikle A'nın en küçük elemanı olarak seçilmiştir. O halde $r \geqslant b$ olamayacağına göre $r < b$ olmalıdır. Böylece $0 \leqslant r < b$ bulunur. Sonuç olarak $a = qb + r$ ve $\leqslant r < b$ şartlarını sağlayan q ve r sayıları üretilmiştir.

Şimdi, küçük bir meseleyi açığa kavuşturmanın zamanı geldi. Bu bölümün başında, matematiğin tamamının kümelerle tanımlanabileceğini iddia etmiştik. Fakat daha sonra, bazı matematiksel varlıkların küme olmadıklarını belirttik. (Örneğin, 5 gibi bir tamsayının küme olmadığını ancak bunun bir kümenin *elemanı* olduğunu söyledik.)

Böyle bir ayrımı yapmamızın sebebi, kümeleri tanımlarken bir dayanak noktasına ihtiyaç duymamızdır. Neticede her matematiksel varlığı bir küme ilan etmek, şüphesiz ki dairesel bir görüntüye yol açar. Böylece bir küme, başka kümelerin bir koleksiyonu olarak tanımlanmak zorunda kalınır!

Fakat matematikçilerin çoğu için "5 sayısı bir küme değildir" demek "5 sayısı bir sayı değildir" demek gibidir.

Gerçek şu ki herhangi bir sayının kendisi, bir küme olarak düşünülebilir. Bunu yapmanın bir yolu, $0 = \varnothing$ şeklinde tanımlayarak işe başlamaktır. Buna göre $1 = \{\varnothing\} = \{0\}$, $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$ ve $3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0,1,2\}$ olur. Genel olarak bir n doğal sayısı, kendisinden önce gelen (ve herbiri bir küme olan) n tane sayıdan oluşan $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ kümesidir.

Biz burada böyle bir işe girişmeyeceğiz ancak $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ sayı sistemlerinin elemanları, kümeler kullanılarak tanımlanabilir. (Toplama, çarpma vb. işlemler bile kümeler teorisi kuramıyla tanımlanabilir.) Aslında matematiğin kendisi, kümeler olarak tanımlanabilecek nesnelerin incelenmesi olarak düşünülebilir. Herhangi bir matematiksel varlık, bu şekilde düşünmek istesek de istemesek de, bir kümedir.

1.10 Russel Paradoksu

Bu bölüm ilginç olabilecek bazı temel bilgileri içerir ancak kitabın geri kalan kısmında kullanılmaz.

Filozof ve matematikçi Bertrand Russell (1872-1970), kümeler teorisi ve matematiğin temelleri üzerine çığır açan çalışmalar yapmıştır. O, kümelerin yanlış kullanımının tuhaf durumlara ve paradokslara yol açtığını anlayan muhtemelen ilk kişiler arasındadır. Russell paradoksu olarak bilinen düşüncesiyle ünlüdür.

Russel paradoksu

$$A = \{X : X \text{ bir küme ve } X \notin X\}. \tag{1.1}$$

kümesi ile ilgilidir. Kelimelerle ifade edecek olursak A kümesi, kendisini bir eleman olarak içermeyen bütün kümelerin kümesidir. Aklımıza gelebilecek birçok küme A kümesinin bir elemanıdır. Örneğin, tamsayılar kümesinin kendisi bir tamsayı değildir (yani $\mathbb{Z} \notin \mathbb{Z}$), bu nedenle $\mathbb{Z} \in A$ olur. Benzer şekilde, $\varnothing$ bir küme ve $\varnothing \notin \varnothing$ olduğu için $\varnothing \in A$ olur.

Şimdi şu soruyu soralım: A kümesinde olmayan bir küme var mıdır? $B = \{\{\{\{\ldots\}\}\}\}$ kümesini ele alalım. B kümesini, bir kutuyu içeren kutu şeklinde düşünebiliriz. İçerdiği kutu da bir kutu içersin ve bu şekilde sonsuza kadar devam etsin. Ya da B kümesini iç içe geçmiş ve sonsuza dek devam eden matruşka bebekler olarak düşünebiliriz. Buna göre B kümesi hakkında ilgi uyandıran şey, tek elemanlı olmasıdır. Bir başka deyişle, tek elemanının kendisi olmasıdır:

$$B = \{\underbrace{\{\{\{\ldots\}\}\}}_{B}\}$$

Böylece $B \in B$ olur ve bu küme, $B \notin B$ şartını sağlamadığı için Eşitlik 1.1 gereğince $B \notin A$ olur.

Russell'ın paradoksu "*A kümesi A'nın bir elemanı mıdır?*" sorusu ile ortaya çıkar. Eşitlik 1.1'e göre, verilen bir X kümesi için $X \in A$ olması $X \notin X$ olması ile aynı anlama gelir. Özel olarak $X = A$ seçilmesi halinde önceki satır, $A \in A$ olmasının $A \notin A$ olması anlamına geleceğini söyler.

Sonuç olarak; eğer $A \in A$ doğru ise bu yanlıştır, eğer $A \in A$ yanlış ise bu doğrudur. Bu, Russell paradoksu olarak adlandırılır.

Başlangıçta Russell paradoksu matematikçiler arasında bir krize yol açmıştır. Matematiksel bir önerme nasıl hem doğru hem de yanlış olabilir? Bu durum, matematiğin ruhuna aykırı bir durum gibi görünmektedir.

Paradoks, kümeler teorisinin titiz bir şekilde incelenmesiyle neyin bir küme olabileceği ve neyin bir küme olmayacağının değerlendirilmesine önayak oldu. Sonunda matematikçiler, **Zermelo-Fraenkel aksiyomları** olarak bilinen bir dizi kümeler teorisi aksiyomları konusunda fikir birliğine vardı. Bu aksiyomlardan bir tanesi, önceki bölümde bahsedilen iyi sıralama prensibidir. Bu aksiyomlardan başka biri de, boştan farklı bir X kümesininin, her $x \in X$ için $X \cap x \neq \emptyset$ özelliğine sahip olamayacağını söyleyen kurulum aksiyomudur. Bu aksiyom, yukarıda bahsedilen dairesel şekilde tanımlı $X = \{X\}$ formundaki "kümeleri" kapsam dışında bırakır. Russell paradoksu gibi durumlar bu aksiyomlara bağlı kaldığımız sürece ortaya çıkmaz. Çoğu matematikçi, bunları inanarak kabul eder ve Zermelo-Fraenkel aksiyomlarını mutlu bir şekilde görmezden gelir. Russell paradoksu gibi durumlar kullandığımız günlük matematikte ortaya çıkmaz. Onları oluşturmak için standartların dışına çıkmak gerekir.

Bununla beraber Russell paradoksu, düşünce ve dil hassasiyetinin matematiğin önemli bir parçası olduğunu bize hatırlatmaktadır. Bir sonraki ünite, düşünce ve dilin sistematikleştirilmesiyle oluşan mantık konusunu ele alacaktır.

Kümeler Üzerine Ek Okuma. Bertrand Russell'ın hayatını ve (onun paradoksunu da içeren) eserini canlı bir şekilde aktaran, Apostolos Doxiadis ve Christos Papadimitriou'nun *Logicomix:* An Epic Search for Truth, adlı romanını okuyabilirsiniz. Ayrıca karikatürist Jessica Hagy'nin çoğunlukla Venn şemalarına dayanan çizimlerini internet üzerinden yayınladığı *Indexed* isimli eserine bir göz atabilirsiniz.

Bölüm 2

Mantık

Mantık, eski bilgilerden yeni bilgiler türetmemize olanak veren ve cümleleri anlamsal bakımdan incelememizi sağlayan sistematik düşünme tarzıdır. Günlük yaşantımızda gayriresmi bir şekilde kullandığımız mantığı özellikle matematikte kullanırız. Örneğin, üzerinde çalıştığımız ve "X Dairesi" olarak adladırdığımız bir daire hakkında aşağıdaki bilgiler verilsin:

1. X dairesinin yarıçapı 3'tür.
2. Bir dairenin yarıçapı r ise o dairenin alanı πr^2 birimkaredir.

Bu iki bilgiyi sorunsuz bir şekilde bir araya getirerek aşağıdaki sonucu elde edebilirsiniz:

3. X dairesinin alanı 9π birimkaredir.

Burada mevcut olan bilgileri bir araya getirip yeni bilgi üretmek için mantık kullanılmıştır. Matematikte yeni bilgilerin türetilmesi çok önemlidir ve mantık burada ana roldedir. Bu ünite, mantık konusunda size yetecek bir uzmanlık kazandırmayı amaçlamaktadır.

Mantık, bilgiyi doğru bir biçimde ortaya çıkarma sürecidir; sadece doğru bilgiyi ortaya çıkarmak *değildir*. Bunun farkında olmak önemlidir. Örneğin, hata yaptığımızı ve aslında X dairesinin yarıçapının 3 değil de 4 olduğunu varsayalım. Aynı argümanı yeniden inceleyelim:

1. X dairesinin yarıçapı 3'tür.
2. Bir dairenin yarıçapı r ise o dairenin alanı πr^2 birimkaredir.

---

3. X dairesinin alanı 9π birimkaredir.

Artık *"X dairesinin yarıçapı 3'tür."* cümlesi artık yanlıştır. Bu nedenle, elde etiğimiz *"X dairesinin alanı 9π birimkaredir."* sonucu da yanlıştır. Ancak buradaki mantık kusursuz bir şekilde doğrudur çünkü bilgilerin bir kısmı yanlış olsa bile bunlar doğru bir şekilde bir araya getirilmiştir. Doğru mantık ile doğru bilgi arasındaki bu ayrım önemlidir çünkü yanlış bir varsayımın sonuçlarını takip edebilmek önemlidir. İdeal olan *hem* mantığın *hem de* verilen bilgilerin doğru olmasıdır ancak burada vurgulanmak istenilen şey, bu iki kavramın birbirinden farklı olmasıdır.

Teoremleri ispatlarken, doğru olduğu açık bir biçimde belli olan (*"Herhangi iki nokta sadece bir tane doğru belirtir."* gibi) ya da doğru olduğu zaten bilinen (örneğin, Pisagor teoremi) bilgilere mantık uygularız. Eğer kullandığımız mantık doğru ise bu tür bilgilerden elde ettiğimiz herhangi bir sonuç da doğru olacaktır (veya en azından, başlangıçta "açıkça doğru" kabul ettiğimiz bilgi kadar geçerli olacaktır).

2.1 Önermeler

Mantık bilimi önermeler ile başlar. **Önerme**, ya kesinlikle doğru ya da kesinlikle yanlış olan bir cümle veya matematiksel ifadedir. Önermeleri, doğru ya da yanlış olan bilgi parçaları olarak düşünebilirsiniz. Böylelikle önermeler, mantık uygulayarak başka bilgi parçaları (ki bunlar da birer önermedir) üretebileceğimiz bilgi parçalarıdır.

Örnek 2.1. Önermelere biraz örnek verelim. Aşağıdakilerin her biri doğrudur.

- Bir dairenin yarıçapı r birim ise o dairenin alanı πr^2 birimkaredir.
- Her çift sayı 2 ile tam bölünür.
- $2 \in \mathbb{Z}$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$
- $\{1, 2, 3\}$ kümesinin 3 tane elemanı vardır.
- Bazı dik üçgenler ikizkenardır.

Örnek 2.2. Önermelere biraz daha örnek verelim. Aşağıdakilerin her biri yanlıştır.

- Bütün dik üçgenler ikizkenardır.
- $5 = 2$
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{R}$
- $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}$
- $\{1, 2, 3\} \cap \mathbb{N} = \varnothing$

Örnek 2.3. Önerme olmayan cümle veya ifadeleri, önerme *olan* benzer ifadelerle eşleştirelim.

Önerme OLMAYANLAR:	Önermeler:
Her iki tarafa 5 ekle.	$x - 5 = 37$ denkleminde her iki tarafa 5 eklenerek $x = 42$ bulunur.
$\mathbb{Z}$	$42 \in \mathbb{Z}$
42	42 bir sayı değildir.
$2x = 84$ denkleminin çözümü kaçtır?	$2x = 84$ denkleminin çözümü $x = 4$'tür.

Örnek 2.4. Belirli bir önermeyi temsil etmek için P, Q, R ve S harflerini sıklıkla kullanacağız. Daha fazla harf gerektiren durumlarda alt indisleri kullanabiliriz. Aşağıda, harfler ile adlandırılmış önermeler verilmiştir. Bunlarından hangilerinin doğru hangilerinin yanlış olduğuna siz karar verin.

- P: Her $n > 1$ tamsayısı için 2^{n-1} asaldır.
- Q: Derecesi n olan her polinomun en fazla n tane kökü vardır.
- R: $f(x) = x^2$ fonksiyonu süreklidir.
- S_1: $\mathbb{Z} \subseteq \varnothing$
- S_2: $\{0, -1, -2\} \cap \mathbb{N} = \varnothing$

Önermeleri (yukarıda yapıldığı gibi) harfler ile adlandırmak büyük bir kolaylık sağlar. Örneğin "*$f(x) = x^2$ fonksiyonu süreklidir.*" gibi belirli bir önermeyi tartışırken, bu önermeyi defalarca yazmak ya da söylemek zorunda kalmamak için ondan sadece R önermesi diye bahsetmek çok daha pratiktir.

Önermeler değişken içerebilir. Bunun için şu örneği verebiliriz.

P: Eğer x tamsayısı 6'nın bir katı ise x çifttir.

Bu doğru bir cümledir. (Dikkat edilirse 6'nın bütün katları çifttir; böylece x tamsayısı, 6'nın hangi katı olursa olsun, çifttir.) Kesinlikle doğru olduğu için P cümlesi bir önermedir. Bir P cümlesi veya önermesi x gibi bir değişken içerdiğinde, bu önermenin x hakkında bir şeyler söylediğini belirtmek için onu bazen $P(x)$ ile temsil ederiz. Böylece yukarıdaki önermeyi şu şekilde gösterebiliriz.

$P(x)$: Eğer x tamsayısı 6'nın bir katı ise x çifttir.

İki değişken içeren bir önerme veya cümle $P(x, y)$ ile gösterilebilir ve bu şekilde devam edilebilir.

Değişken içeren bir cümlenin önerme olmaması da oldukça muhtemeldir. Şu örneği ele alalım.

$Q(x)$: x tamsayısı çifttir.

Bu bir önerme midir? Bu cümlenin doğru ya da yanlış olması sadece x tamsayısına bağlıdır. Örneğin $x = 4$ ise doğru, $x = 7$ ise yanlıştır. Ancak x tamsayısının değeri üzerinde herhangi bir koşul olmaksızın $Q(x)$ cümlesinin doğru ya da yanlış olduğunu söylemek imkansızdır. Kesinlikle doğru ya da kesinlike yanlış olmadığı için $Q(x)$ bir önerme olamaz. Doğruluğu bir veya daha fazla değişkene bağlı olan bu ve benzeri bir cümleye **açık önerme** denir. Bir açık önermedeki değişkenler sadece sayıları değil, herhangi türden bir varlığı temsil edebilir. Aşağıda, değişkenleri birer fonksiyon olan bir açık önerme verilmiştir:

$R(f, g)$: f fonksiyonu g fonksiyonun türevidir.

Bu açık önerme, $f(x) = 2x$ ve $g(x) = x^2$ ise doğrudur fakat $f(x) = x^3$ ve $g(x) = x^2$ ise yanlıştır. Burada belirtmek gerekirse $R(f, g)$ gibi (değişken içeren) bir cümle, $R(f, g)$ veya sadece R ile gösterilebilir. Cümlenin değişken içerdiğini vurgulamak istediğimizde $R(f, g)$ gösterimini kullanırız.

Açık önermeler konusunu daha sonra ele alacağız. Şimdilik önermelere geri dönelim.

Önermeler, matematiğin her alanında karşımıza çıkar. Doğru olduğu ispatlanmış her sonuç veya teorem bir önermedir. Örnegin, ikinci dereceden bir denklemin köklerini veren kuadratik formül ve Pisagor teoremi birer önermedir:

P: İkinci dereceden $x^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ile verilir.

Q: Dik kenar uzunlukları a ve b, hipotenüs uzunluğu c olan bir dik üçgende $a^2 + b^2 = c^2$ olur.

Şimdi, çok meşhur olan bir önerme verelim. Bu önerme o kadar meşhurdur ki bir adı vardır. On yedinci yüzyıl Fransız matematikçilerinden Pierre Fermat tarafından bir defterin kenar boşluğuna yazılan bu önerme **Fermat'ın son teoremi** olarak adlandırılmıştır.

R: $n > 2$ olmak üzere her $a, b, c, n \in \mathbb{N}$ için $a^n + b^n \neq c^n$ olur.

Fermat bu önermenin doğru olduğuna inanmıştır. Defterine, bu önermenin doğru olduğunu kanıtlayabileceğini ancak defterindeki kenar boşluğunun ispata yetecek kadar geniş olmadığını yazmıştır. Fermat'ın aklında gerçekten de doğru bir ispat düşüncesi olduğu kuşkuludur çünkü ölümünden sonra parlak zekalı pek çok matematikçi bu önermenin doğru (veya yanlış) olduğunu ispatlamakta başarısız olmuştur. Sonunda, 1993 yılında Princeton Üniversitesi'nden Andrew Wiles bu problemi ispatladığını duyurmuştur. Bu problem üzerinde yedi yıldan fazla çalışan Wiles'ın ispatı yüzlerce sayfadan oluşmaktadır. Bu hikayenin özeti, bazı doğru önermelerin ispatları çok açık değildir.

Bir isim verilecek kadar ünlü olan başka bir önerme daha verelim. Bu önerme, ilk olarak Alman matematikçi Christian Goldbach tarafından on sekizinci yüzyılda ortaya atılmıştır. Bu yüzden **Goldbach sanısı** olarak adlandırılır:

S: 2'den büyük olan her çift tamsayı, iki tane asal sayının toplamıdır.

Hemfikir olacağınız üzere S önermesi ya doğrudur ya da yanlıştır. Aslında, bu sanı doğruymuş gibi görünür çünkü $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 5 + 5$, $12 = 5 + 7$, $100 = 17 + 83$ vb. örneklerde olduğu gibi 2'den büyük bazı çift sayıları incelediğinizde, bunların iki asal sayının toplam olduğunu görebilirsiniz. Ancak bu, iki asal sayının toplamına eşit olmayan büyük bir çift sayı olamayacağı anlamına gelmez. Eğer böyle bir sayı var ise S yanlıştır. Asıl melese, Goldbach'ın bu problemi ortaya atmasının üzerinden 260 yıl geçmesine rağmen hiçbir matematikçinin bunun doğru mu yoksa yanlış mı olduğunu belirleyememesidir. Bu cümle açıkça ya doğru ya da yanlış olduğu için S bir önermedir.

Bu kitap, S önermesinin (veya herhangi bir önermenin) doğru ya da yanlış olduğunu ispatlamak için kullanılabilecek yöntemleri anlatır. Bir önermenin doğru olduğunu kanıtlamak için açıkça doğru olan önermeler (ya da doğruluğu kanıtlanmış diğer önermeler) ile başlayıp, S gibi daha karmaşık önermeler elde edinceye kadar mantık kullanırız. Kuşkusuz ki bazı önermeleri kanıtlamak diğerlerinden daha zordur. Herkesin bildiği bir gerçek, S önemesini ispatlamanın çok zor olduğudur. Biz ispatlanması daha kolay önermeler üzerinde yoğunlaşacağız.

Aslında önemli olan nokta şudur: Önermelerin doğru olduğunu ispatlarken, önermeleri anlamak ve bilgi parçalarını birleştirip yeni bilgi üretmek için mantık kullanırız. Sonraki birkaç bölümde, önermelerin yeni önermeler oluşturmak için birleştirilebileceği ya da daha basit önermelere parçalanabileceği bazı standart yöntemleri inceleyeceğiz.

Alıştırmalar

Aşağıdaki ifadelerin birer önerme olup olmadıklarını belirleyiniz. Önerme olanların doğru mu yoksa yanlış mı olduklarını, eğer mümkün ise, belirtiniz.

1. Her reel sayı çift bir tamsayıdır.
2. Her çift tamsayı bir reel sayıdır.
3. Eğer x ile y iki reel sayı ve $5x = 5y$ ise $x = y$ olur.
4. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ kümeleri.
5. $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{N}$ kümeleri sonsuzdur.
6. Bazı kümeler sonludur.
7. Beşinci dereceden herhangi bir polinomun türevi altıncı dereceden bir polinomdur.
8. $\mathbb{N} \notin \mathcal{P}(\mathbb{N})$
9. $\cos(x) = -1$
10. $(\mathbb{R} \times \mathbb{N}) \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{R}) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

11. x tamsayısı 7'nin bir katıdır.

12. Eğer x tamsayısı 7'nin bir katı ise bu sayı 7 ile tam bölünür.

13. Bir x tamsayısı ya 7'nin bir katıdır ya da değildir.

14. Bana İsmail diyebilirsin.

15. Başlangıçta, Allah dünyayı ve cenneti yarattı.

2.2 Ve, Veya, Değil Bağlaçları

İki önermeyi birleştirip yeni bir önerme oluşturmak için "ve" kelimesi kullanılabilir. Aşağıdaki cümleyi göz önüne alalım.

R_1: 2 çift sayıdır **ve** 3 tek sayıdır.

Bu önermeyi "ve" kelimesinin mantıksal anlamına dayanarak doğru kabul ederiz. Dikkat edilirse R_1 iki tane basit önermeden oluşmaktadır:

P: 2 çift sayıdır.

Q: 3 tek sayıdır.

Bu önermeler, daha karmaşık olan R_1 önermesini oluşturmak için "ve" bağlacı ile birleştirilmiştir. R_1 önermesi, P ve Q önermelerinin her ikisinin de doğru olduğunu ileri sürer. Gerçekten, P ve Q önermelerinin her ikisi de doğru olduğu için R_1 de doğrudur.

Eğer P ve Q önermelerinden biri ya da her ikisi yanlış olsaydı R_1 önermesi de yanlış olurdu. Örneğin, aşağıdaki önermelerin her biri yanlıştır.

R_2: 1 çift sayıdır **ve** 3 tek sayıdır.

R_3: 2 çift sayıdır **ve** 4 tek sayıdır.

R_4: 3 çift sayıdır **ve** 2 tek sayıdır.

Bu örneklerden görüleceği üzere herhangi iki P ve Q önermeleri birleştirilerek "P **ve** Q" adlı yeni bir önerme oluşturulabilir. Önermeleri harflerle temsil etme anlayışına bağlı kalarak "ve" kelimesi anlamına gelen $\wedge$ sembolünü kullanacağız. Böylelikle, P ile Q birer önerme ise "$P \wedge Q$" ifadesi "P **ve** Q" önermesini temsil eder. Hem P hem de Q doğru ise "$P \wedge Q$" önermesi doğrudur; aksi takdirde yanlıştır. Bu durum, **doğruluk tablosu** olarak adlandırılan aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

P	Q	$P \wedge Q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

Bu tablodaki D harfi "Doğru" anlamına, Y harfi ise "Yanlış" anlamına gelir. (D ve Y değerlerine **doğruluk değerleri** denir.) Her satır, P ve Q önermeleri için olası dört doğruluk değerinden bir tanesini listeler. En tepesinde $P \wedge Q$ bulunan sütun ise her bir durum için $P \wedge Q$ önermesinin doğru mu yoksa yanlış mı olduğunu belirtir.

Önermeler "**veya**" sözcüğü kullanılarak da birleştirilebilir. Aşağıdaki dört önermeyi inceleyelim.

S_1: 2 çift sayıdır **veya** 3 tek sayıdır.

S_2: 1 çift sayıdır **veya** 3 tek sayıdır.

S_3: 2 çift sayıdır **veya** 4 tek sayıdır.

S_4: 3 çift sayıdır **veya** 2 tek sayıdır.

Matematikte "P **veya** Q" önermesi, P ve Q önermelerinden birinin *veya her ikisinin* doğru olması anlamına gelir. Bu nedenle S_1, S_2 ve S_3 önermelerinin hepsi doğrudur; S_4 ise yanlıştır. "Veya" kelimesini temsil etmek için $\vee$ simgesi kullanılır. Buna göre P ve Q birer önerme ise "P **veya** Q" önermesi $P \vee Q$ ile gösterilir. Bu önermenin doğruluk tablosu aşağıda verilmiştir.

P	Q	$P \vee Q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

Yukarıdaki tabloda ifade edilen "veya" kelimesinin anlamı, günlük konuşma dilindeki sıkça kullanılan halinden farklıdır. Bunun bilincinde olmak önemlidir. Örneğin, bir üniversite yetkilisinin aşağıdaki tehdidi savurduğunu varsayalım:

Öğrenim harcını ödersiniz veya okuldan ayrılırsınız.

Bu cümleden, öğrenim harcını ödemeniz gerektiğini *veya* okuladan ayrılmanız gerektiğini ancak *bunların her ikisinin birden olmayacağını* anlarsınız. Bizim için "veya" kelimesi, tabloda $\vee$ için belirtilen anlama gelir. Böylece $P \vee Q$ önermesinin doğru olması, P ve Q önermelerinden *birinin veya her ikisinin* doğru olduğu anlamına gelir. Bu nedenle P ve Q önermelerinden sadece birinin doğru olduğunu ifade etmemiz gerektiğinde aşağıdaki ifadelerden birini kullanırız:

P **veya** Q **ancak her ikisi birden değil**.

Ya P **ya da** Q.

P **veya** Q **önermelerinden sadece biri**.

Eğer üniversite yetkilisi bir matematikçi olsaydı, ifadesini şu şekilde daha nitelikli kılabilirdi:

Öğrenim harcını ödersiniz **veya** okuldan ayrılırsınız **ancak bunların her ikisi birden olmaz**.

Ya öğrenim harcını ödersiniz **ya da** okuladan ayrılırsınız.

Bu bölümü tamamlamak için eski önermelerden yenilerini elde etmenin başka bir yolundan daha bahsedelim. Herhangi bir P önermesi verildiğinde "P **doğru değildir**." biçiminde yeni bir önerme oluşturabiliriz. Örneğin, aşağıdaki önermeyi ele alalım.

2 çift sayıdır.

Bu önerme doğrudur. Şimdi bu önermeyi, sonuna "önermesi doğru değildir" kelimelerini ekleyerek değiştirelim:

2 çift sayıdır **önermesi doğru değildir**.

Elde ettiğimiz bu yeni önerme yanlıştır.

Başka bir örnek olarak, yanlış olan "$2 \in \varnothing$" önermesi ile başladığımızda, doğru olan "$2 \in \varnothing$ doğru değildir." önermesini elde ederiz.

Burada kullandığımız "doğru değildir" ifadesini $\sim$ sembolü ile temsil ederiz. Bu nedenle $\sim P$ ifadesi "P **doğru değildir**" anlamına gelir. Genellikle, $\sim P$ ifadesini "P değil" veya "P'nin değili" olarak okuruz. İki önermeyi birleştiren $\wedge$ ve $\vee$ sembollerinden farklı olarak, $\sim$ sembolü sadece tek bir önermeyi değiştirir. Bu nedenle doğruluk tablosunda, her biri P önermesinin doğruluk değerlerine karşılık gelen, iki tane satır vardır.

P	$\sim P$
D	Y
Y	D

$\sim P$ önermesine P'nin **değili** veya P'nin **olumsuzu** denir. Belirli bir önermenin olumsuzu çeşitli şekillerde ifade edilebilir. Örneğin,

P: 2 çift sayıdır.

önermesini ele alalım. Bu önermenin değili aşağıdaki gibi çeşitli şekillerde ifade edilebilir.

$\sim P$: 2 çift sayıdır önermesi doğru değildir.

$\sim P$: 2 çift sayıdır önermesi yanlıştır.

$\sim P$: 2 çift sayı değildir.

Bu bölümde; önermelerin $\wedge$, $\vee$ ve $\sim$ işlemleri ile nasıl birleştirilebileceğini ya da değiştirilebileceğini öğrendik. Elbette ki bu işlemleri açık önermelere ya da önermeler ile açık önermelerin karışımlarına uygulayabiliriz. Örneğin, (3 bir tek tamsayıdır) $\wedge$ (x bir çift tamsayıdır) ifadesi, bir önerme ile bir açık önermenin birleşimi olan bir açık önermedir.

Alıştırmalar

Aşağıda verilen her bir önermeyi veya açık önermeyi $P \wedge Q$, $P \vee Q$ ve $\sim P$ formlarından biriyle ifade ediniz. Her soruda, P ve Q önermelerinin hangi önermerleri belirtiğini ifade etmeyi unutmayınız.

1. 8 hem çift sayıdır hem de 2'nin bir kuvvetidir.
2. A matrisi tersinir değildir.
3. $x \neq y$
4. $x < y$
5. $y \geqslant x$
6. Sınav Çarşamba veya Cuma günü yapılacak.
7. x sayısı sıfıra eşittir ancak y sayısı sıfıra eşit değildir.
8. x ve y sayılarından en az biri sıfıra eşittir.
9. $x \in A - B$
10. $x \in A \cup B$
11. $A \in \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : |\overline{X}| < \infty\}$
12. Mutlu aileler hep aynıdır ancak mutsuz ailelerin her birinin kendine özgü bir mutsuzluğu vardır. (Leo Tolstoy, *Anna Karenina*)
13. İnsanlar iyi olmak ister ama çok iyi değil ve her zaman değil. (George Orwell)
14. Bir insan olan şeyleri aramalı, olması gerektiğini düşündüğü şeyleri değil. (Albert Einstein)

2.3 Koşullu Önermeler

İki önermeyi birleştirmenin başka bir yolu daha vardır. Belirli bir a tamsayısını akılda tutalım. Bu tamsayı hakkında verilen aşağıdaki önermeyi ele alalım:

R: Eğer a tamsayısı 6'nın bir katı ise a tamsayısı 2 ile tam bölünür.

Tamsayılar hakkındaki bilgilerimize ve "eğer" ile "ise" kelimelerinin anlamlarına dayanarak bu önermenin doğru olduğunu görürüz. Eğer a tamsayısı 6'nın bir katı ise a çifttir. Böylece a tamsayısı 2 ile tam bölünür. Dikkat edilirse R önermesi iki tane basit önermeden oluşmaktadır:

P: a tamsayısı 6'nın bir katıdır.

Q: a tamsayısı 2 ile tam bölünür.

R: Eğer P ise Q.

Genel olarak herhangi iki P ve Q önermesi verildiğinde *"Eğer P ise Q."* formunda yeni bir önerme oluşturabiliriz. Sembolik olarak $P \Rightarrow Q$ şeklinde yazılan bu önerme *"Eğer P ise Q."* (ya da kısaca *"P ise Q."*) veya *"P önermesi Q önermesini gerektirir."* şeklinde okunur. Burada kullanılan $\Rightarrow$ sembolünün, $\vee$ ve $\wedge$ sembollerinde olduğu gibi çok özel bir anlamı vardır: $P \Rightarrow Q$ önermesinin doğru olduğunu iddia ettiğimizde, *eğer* P doğru *ise* Q önermesinin mutlaka doğru olması gerektiğini ifade ederiz. (Bir başka deyişle P önermesinin doğru olma koşulu, Q önermesini doğru olmak zorunda bırakır.) $P \Rightarrow Q$ formundaki bir önermeye **koşullu** önerme denir çünkü P önermesinin doğru olma *koşulu altında* Q önermesi doğrudur.

$P \Rightarrow Q$ önermesini, ne zaman ki P doğru olsa o zaman Q önermesinin de doğru olacağına dair verilmiş bir söz olarak düşünebilirsiniz. Bu sözde durulmamasının (yani yanlış olmasının) tek bir yolu vardır: P doğrudur fakat Q yanlıştır. Buna göre $P \Rightarrow Q$ sözünün doğruluk tablo şu şekildedir:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

$P \Rightarrow Q$ önermesinin tablonun son iki satırında doğru olması sizi rahatsız etmiş olabilir. Sizi bu tablonun doğru olduğuna ikna etmek için şu örneği verebiliriz. Hocanızın şu sözü verdiğini varsayalım:

Eğer finalden geçer not alır **iseniz** bu dersi geçeceksiniz.

Aslında hocanız size şu sözü vermektedir:

(Finalden geçer not alırsınız) $\Rightarrow$ (Bu dersi geçersiniz).

Hocanız hangi durumda size yalan söylemiş olabilir? Finalden geçer not alıp alamama ve dersi geçip geçememeye bağlı olarak olası dört senaryo vardır: Bu senaryolar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Finalden geçer not aldınız	Dersi geçtiniz	(Finalden geçer not aldınız) $\Rightarrow$ (Dersi geçtiniz)
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

İlk satır, finali ve dersi geçtiğiniz senaryoyu belirtir. Hocanız verdiği sözü açık bir şekilde tutmuştur. Buna göre size doğru söylediğini belirtmek için üçüncü sütuna D sembolü konulmuştur. İkinci satırda, sınavı geçtiniz ancak hocanız sizi dersten bıraktı. Bu durumda hocanız verdiği sözde durmamıştır ve üçüncü sütundaki Y sembolü size verdiği sözün yalan olduğunu temsil etmektedir.

Şimdi üçüncü satırı ele alalım. Bu senaryoya göre finalden başarısız oldunuz ancak dersi geçtiniz. Böyle bir şey nasıl olmuş olabilir? Belki hocanız size acımıştır. Ancak bu onu yalancı yapmaz. Size verdiği tek söz, finali geçtiğinizde dersten de geçeceğinizdir. Size, dersi geçmenin *tek yolunun* finali geçmek olduğunu söylememiştir. Yalan söylemediği için üçüncü sütunda D sembolü vardır.

Son olarak dördüncü satıra bakalım. Bu senaryoda, finalden başarısız oldunuz ve dersten kaldınız. Hocanız, yapacağına dair söz verdiği her şeyi tam olarak yaptığı için size yalan söylememiştir. Bu nedenle üçüncü sütunda D sembolü vardır.

Matematikte karşılaştığınız her "*Eğer P ise Q.*" yapısı daima $\Rightarrow$ sembolünün doğruluk tablosunda ifade edilen anlama gelir. Anlam bakımından $P \Rightarrow Q$ ile aynı olan başka ifadeler elbette ki vardır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Eğer } P \text{ ise } Q.\\
P \text{ ise } Q.\\
P \text{ olduğunda } Q.\\
\text{Ne zaman ki } P, \text{ o zaman } Q.\\
P \text{ önermesi } Q \text{ için yeterli bir koşuldur.}\\
Q \text{ için } P \text{ yeter.}\\
Q \text{ önermesi } P \text{ için gerekli bir koşuldur.}\\
P \text{ için } Q \text{ gerekir.}\\
\text{Ancak } Q \text{ ise } P.
\end{array}\right\} P \Rightarrow Q$$

Bu ifadelerin her biri "*Eğer P ise Q.*" yerine kullanılabilir (ve onunla aynı anlama gelir). Bunların anlamlarını inceleyerek $P \Rightarrow Q$ ile aynı anlamda olduklarına dair kendinizi ikna etmelisiniz. Örneğin, $P \Rightarrow Q$ önermesinde, P'nin doğru olma koşulu Q'nun da doğru olması için yeterlidir. Dolayısıyla *"P önermesi Q için yeterli bir koşuldur."*

İfade tarzı biraz aldatıcı olabilir. Genellikle koşullu önerme içeren günlük bir olay, o önermeyi aydınlatmaya yardımcı olabilir. Örneğin, hocanızın verdiği sözü tekrar ele alalım:

(Finalden geçer not alırsınız) $\Rightarrow$ (Bu dersi geçersiniz).

Bunun anlamı, (belki gerekli değildir ama) finalden geçer not almak bu dersi geçmek için yeterlidir. Dolayısıyla hocanız size verdiği sözü şöyle de ifade edebilirdi:

Finalden geçer not almak bu dersi geçmek için yeterlidir.

Dersi geçmek için finalden geçer not almak yeter.

Günlük konuşmalarımızda "*Eğer P ise Q.*" demek istediğimizde, normal olarak bunu "*Q önermesi P için gerekli bir koşuldur.*" veya "*Ancak Q ise P.*" şeklinde ifade etmeyiz. Fakat bu tür yapılar matematikte yaygındır. Bunların neden mantıklı olduğunu anlamak için anlamlarını incelemek gerekir. Dikkat edilirse $P \Rightarrow Q$ doğru olduğunda, P'nin doğru fakat Q'nun yanlış olması imkansızdır. Bu yüzden P'nin doğru olabilmesi için Q'nun mutlaka doğru olması gerekir. Buna göre "*Q önermesi P için gerekli koşuldur.*" Ayrıca bu, sadece Q doğru olduğunda P'nin doğru olabileceği anlamına gelir. Böylelikle, "*Ancak Q ise P.*" olur.

Alıştırmalar

Anlamlarını değiştirmeden, aşağıdakilerin her birini "*Eğer P ise Q.*" formunda bir cümleye çeviriniz.

1. Bir matris, determinantı sıfırdan farklı olduğunda tersinirdir.
2. Bir fonksiyonun sürekli olması için türevlenebilir olması yeterlidir.
3. Bir fonksiyonun integrallenebilir olması için sürekli olması gerekir.
4. Polinom olan bir fonksiyon rasyonel fonksiyondur.
5. Bir tamsayı ancak 4 ile tam bölündüğünde 8 ile tam bölünür.
6. Bir yüzeyin yalnızca bir yüzü varolduğunda o yüzey yönlendirilemez.
7. Bir seri mutlak yakınsak olduğunda yakınsaktır.
8. Yakınsaklık yarıçapı r olan bir geometrik seri eğer $|r| < 1$ ise yakınsaktır.
9. Bir fonksiyon sürekli olmak koşulu ile integrallenebilirdir.
10. Diskriminant ancak ikinci dereceden denklemin reel çözümleri yoksa negatiftir.
11. Yazmayı bırakırsan başarısız olursun. (Ray Bradbury)

12. İnsanlar gerçekleri yalnızca, gerçekler zaten inandıkları şeyler ile bağdaşırsa doğru kabul eder. (Andy Rooney)

13. İnsanlar benimle hemfikir olduklarında yanılmam gerektiğini hissediyorum. (Oscar Wilde)

2.4 Çift Yönlü Koşullu Önermeler

$P \Rightarrow Q$ önermesinin $Q \Rightarrow P$ ile aynı olmadığını bilmek önemlidir. Bunu görmek için, a bir tamsayı olmak üzere, aşağıdaki önermeleri göz önüne alalım:

$$\begin{aligned}(a \text{ tamsayısı 6'nın bir katıdır}) &\Rightarrow (a \text{ tamsayısı 2 ile tam bölünür}),\\ (a \text{ tamsayısı 2 ile tam bölünür}) &\Rightarrow (a \text{ tamsayısı 6'nın bir katıdır}).\end{aligned}$$

İlk önerme, a tamsayısının 6'nın bir katı olması durumunda onun 2 ile tam bölünebileceğini iddia eder. Bu açıkça doğrudur çünkü 6'nın herhangi bir katı çifttir ve çift olan her sayı 2 ile tam bölünür. İkinci önerme, a'nın 2 ile tam bölünmesi halinde onun 6'nın bir katı olduğunu iddia etmektedir. Bu her zaman doğru olmak zorunda değildir. Örneğin, $a = 4$ tamsayısı 2 ile tam bölünür ancak 6'nın bir katı değildir. Bu nendenle $P \Rightarrow Q$ ve $Q \Rightarrow P$ önermelerinin anlamları genel olarak birbirinden oldukça farklıdır. $Q \Rightarrow P$ koşullu önermesi $P \Rightarrow Q$ önermesinin **karşıtı** olarak adlandırılır. Bu nedenle, koşullu bir önerme ve onun karşıtı tamamen farklı şeyler ifade eder.

Ancak bazen, uygun bir şekilde seçilen P ve Q önermeleri için $P \Rightarrow Q$ ve $Q \Rightarrow P$ önermelerinin her ikisinin de doğru olması mümkündür. Örneğin, aşağıdaki önermeleri göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}(a \text{ tamsayısı çifttir}) &\Rightarrow (a \text{ tamsayısı 2 ile tam bölünür}),\\ (a \text{ tamsayısı 2 ile tam bölünür}) &\Rightarrow (a \text{ tamsayısı çifttir}).\end{aligned}$$

Dikkat edilirse a tamsayısının değeri ne olursa olsun, bu önermelerin her ikisi de doğrudur. Hem $P \Rightarrow Q$ hem de $Q \Rightarrow P$ doğru olduğu için $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ önermesi de doğrudur.

Şimdi, $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ önermesini ifade etmek için kullanacağımız $\Leftrightarrow$ sembolünü verelim: $P \Leftrightarrow Q$ ifadesi $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ ile aynı anlama gelir ve *"P ancak ve ancak Q."* veya *"P gerek ve yeter şart Q."* şeklinde okunur. Örneğin, bir a tamsayısı için verilen

$$(a \text{ tamsayısı çifttir}) \Leftrightarrow (a \text{ tamsayısı 2 ile tam bölünür})$$

önermesi *"Bir a tamsayısı çifttir ancak ve ancak a tamsayısı 2 ile tam bölünür."* ya da *"Bir a tamsayısının çift olması için gerek ve yeter şart a'nın 2 ile tam bölünmesidir."* şeklinde okunur.

Aşağıda, $P \Leftrightarrow Q$ önermesine ait doğruluk tablosu verilmiştir. Dikkat edilirse hem $P \Rightarrow Q$ hem de $Q \Rightarrow P$ önermeleri ($\Rightarrow$ sembolünün doğruluk tablosundaki) ilk ve son satırlarda doğrudur. Buna göre $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ ve böylece $P \Leftrightarrow Q$ önermesi yine o satırlarda doğrudur. Ancak ortadaki iki satırda, $P \Rightarrow Q$ veya $Q \Rightarrow P$ önermelerinden biri yanlıştır. Dolayısıyla $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ önermesi yanlıştır. Böylece $P \Leftrightarrow Q$ önermesi de yanlıştır.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

Bu doğruluk tablosunu "R : (a tamsayısı çifttir) $\Leftrightarrow$ (a tamsayısı 2 ile tam bölünür)" önermesiyle karşılaştıralım. Eğer a çift ise $\Leftrightarrow$ sembolünün her iki tarafında yer alan önermeler doğrudur. Böylece, verilen tabloya göre R doğrudur. Eğer a tek ise $\Leftrightarrow$ sembolünün her iki tarafında yer alan önermeler yanlıştır. Verilen tabloya göre R önermesi yine doğrudur. Böylelikle, a tamsayısı hangi değeri alırsa alsın, R önermesi doğrudur. Genelleyecek olursak $P \Leftrightarrow Q$ önermesinin doğru olması, P ve Q önermelerinin her ikisinin de doğru ya da her ikisinin de yanlış olduğu anlamına gelir.

Şaşırtıcı olmayan, $P \Leftrightarrow Q$ önermesini söylemenin birçok yolu olmasıdır. Aşağıdaki yapıların hepsi $P \Leftrightarrow Q$ anlamındadır:

$$\left.\begin{array}{l}P \text{ ancak ve ancak } Q.\\ P \text{ gerek ve yeter şart } Q.\\ P \text{ için } Q \text{ gereklidir ve yeterlidir.}\\ \text{Eğer } P \text{ ise } Q \text{ ve bunun karşıtı.}\end{array}\right\} P \Leftrightarrow Q$$

Bunların ilk üçü, önceki bölümde verilen yapıları birleştirerek $P \Rightarrow Q$ ve $Q \Rightarrow P$ önermesi ifade eder. Sonuncusundaki *"ve bunun karşıtı"* kelimeleri ise *"Eğer P ise Q."* önermesinin doğru olmasının yanı sıra *"Eğer Q ise P."* önermesinin de doğru olması anlamında kullanılmıştır.

Alıştırmalar

Anlamlarını değiştirmeden, aşağıdaki cümlelerden her birini *"P ancak ve ancak Q"* biçiminde bir cümle haline getiriniz.

1. Bir A matrisin tersinir olması için $\det(A) \neq 0$ olması gereklidir ve yeterlidir.
2. Bir fonksiyonun türevi sabit ise o fonksiyon lineerdir ve bunun karşıtı da doğrudur.
3. Eğer $xy = 0$ ise $x = 0$ veya $y = 0$ olur ve bunun karşıtı da doğrudur.
4. Eğer $a \in \mathbb{Q}$ ise $5a \in \mathbb{Q}$ ve $5a \in \mathbb{Q}$ ise $a \in \mathbb{Q}$ olur.
5. Bir olayın maceraya dönüşmesi için birinin onu anlatması gerekli ve yeterlidir. (Jean-Paul Sartre)

2.5 Önermeler için Doğruluk Tabloları

Artık $\wedge, \vee, \sim, \Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ sembollerinin doğruluk tablolarını biliyor olmanız gerekir. Bunlar, öğrenmenin yanı sıra *özümsenmelidir*. Bu sembolleri iyice anlamanız gerekmektedir çünkü birazdan bunlar, daha karmaşık önermeler oluşturmak için birleştirilecektir.

Örneğin, P ve Q önermelerinden birinin doğru ama her ikisinin birden doğru olmadığını belirtmek istediğimizi varsayalım. Sembollerden hiç biri tek başına bunu ifade etmez. Ancak sembolleri birleştirerek

$$(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$$

önermesini yazabiliriz. Bu önermenin anlamı tam olarak şu şekildedir:

P veya Q doğrudur fakat hem P hem de Q önermesinin doğru olması söz konusu değildir.

Bu önerme, P ve Q önermelerinin doğruluk değerlerine bağlı olarak doğru veya yanlıştır. Aslında bu önerme için bir doğruluk tablosu oluşturabiliriz. Her zamanki gibi P ve Q'nun doğru/yanlış olası kombinasyonlarını dört satırda listeleyerek başlayalım. Dikkat edilirse $(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$ önermesi $(P \vee Q)$ ve $(P \wedge Q)$ önermelerinden oluşur. Bu yüzden üçüncü ve dördüncü sütunları bunların doğruluk değerleri için ayıralım. Beşinci sütunda $\sim (P \wedge Q)$ önermesinin değerlerini listeleyelim. Bu değerler, dördüncü sütundaki girdilerin tersleridir. Böylelikle, üçüncü ve beşinci sütunları $\wedge$ sembolü ile birleştirerek altıncı sütundaki $(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$ önermesinin değerlerini elde ederiz.

P	Q	$(P \vee Q)$	$(P \wedge Q)$	$\sim (P \wedge Q)$	$(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$
D	D	D	D	Y	**Y**
D	Y	D	Y	D	**D**
Y	D	D	Y	D	**D**
Y	Y	Y	Y	D	**Y**

Bu doğruluk tablosu, P ve Q önermelerinden sadece biri doğru olduğunda $(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$ önermesinin doğru olduğunu söyler yani kastettiğimiz anlamı taşımaktadır. (Doğruluk tablosunun ortadaki üç sütunun "yardımcı sütunlar" olduğuna dikkat ediniz. Yaptıklarınızdan eminseniz, doğruluk tablolarını yazarken bu sütunları atlamayı tercih edebilirsiniz.)

Başka bir örnek için x ve y reel sayılarıyla ilgili aşağıdaki tanıdık önermeyi ele alalım:

xy çarpımı sıfıra eşittir ancak ve ancak $x = 0$ veya $y = 0$'dır.

Bu önerme, $(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ biçiminde modellenebilir. Eğer $xy = 0$, $x = 0$ ve $y = 0$ önermelerini P, Q ve R harfleriyle temsil edersek $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ elde ederiz. Dikkat edileceği üzere burada parantez kullanımı gereklidir. Aksi halde bunun $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ veya $(P \Leftrightarrow Q) \vee R$ önermelerinden hangisi olduğunu bilemeyiz.

$P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ için bir doğruluk tablosu oluştururken P, Q ve R önermelerinin her bir D/Y kombinasyonu için bir satır gerekir. Bu şekildeki muhtemel sekiz kombinasyon, aşağıdaki tabloda yer alan ilk üç sütunda verilmiştir.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \Leftrightarrow (Q \vee R)$
D	D	D	D	**D**
D	D	Y	D	**D**
D	Y	D	D	**D**
D	Y	Y	Y	**Y**
Y	D	D	D	**Y**
Y	D	Y	D	**Y**
Y	Y	D	D	**Y**
Y	Y	Y	Y	**D**

Dördüncü sütun, $\vee$ sembolünün doğruluk tablosu hakkında bildiklerimiz kullanarak doldurulmuştur. Son olarak beşinci sütun ise $\Leftrightarrow$ sembolünün doğruluk tablosu hakkındaki bildiklerimizle birinci ve dördüncü sütunları birleştirerek doldurulmuştur. Sonuç olarak ortaya çıkan tablo P, Q ve R önermelerinin tüm değerleri için $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesinin doğru/yanlış değerlerini verir.

Dikkat edileceği üzere $P : xy = 0$, $Q : x = 0$ ve $R : y = 0$ önermeleri, çeşitli x ve y reel sayılarına karşılık farklı doğruluk değerlerine sahiptir fakat $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesi daima doğrudur. Örneğin, $x = 2$ ve $y = 3$ ise P, Q ve R önermelerinin hepsi yanlıştır. Bu senaryo, tablonun son satırında açıklanmıştır ve orada $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesi doğrudur. Benzer şekilde, tablonun ikinci satırında açıklandığı üzere eğer $x = 0$ ve $y = 7$ ise P ve Q doğrudur fakat R yanlıştır. Bu durumda da $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesi doğrudur. Aslında $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesinin her x ve y reel sayıları için doğru olmasının basit bir nedeni vardır: $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesi, *matematiksel olarak doğru olan* $(xy = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$ önermesini temsil etmektedir. Bunun yanlış olması tartışmasız bir şekilde imkansızdır.

Bu tabloda, $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesinin yanlış olduğu satırlar ilginizi çekmiş olabilir. O satırlar tabloda niçin yer almaktadır? Bunun sebebi, $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesinin yanlış bir önermeyi de temsil edebilecek olmasıdır. Bunun nasıl olduğunu görmek için hocanızın dönem sonunda şu sözü verdiğini hayal edin:

Bu dersi geçmek için gerek ve yeter şart final sınavından "A" ya da "B" notu almanızdır.

Bu söz, $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ formundadır ve doğruluk değerleri yukarıdaki tabloda verilmiştir. Sınavdan "A" aldığınızı ancak dersten başarısız olduğunuzu düşünün. Bu durumda hocanız size yalan söylemiş olur. Aslında P yanlış, Q doğru ve R yanlıştır. Bu senaryo, tablonun altıncı satırında yansıtılmıştır ve gerçekten de $P \Leftrightarrow (Q \vee R)$ önermesi yanlıştır (yani bu bir yalandır).

Bu örnekten çıkarılacak ders şudur: İnsanlar yalan söyleyebilir ancak doğru bir matematiksel önerme *hiçbir zaman* yalan söylemez.

Bu bölümü, parantezlerin kullanımıyla ilgili bir açıklama yaparak bitirelim. Dikkat edileceği üzere $\sim$ sembolü, cebirdeki eksi işaretine benzer. Kendisini takip eden ifadeyi olumsuzlaştırır. Böylelikle, $\sim P \vee Q$ ifadesi $(\sim P) \vee Q$ anlamına gelir ancak $\sim (P \vee Q)$ anlamına gelmez. Öbür yandan $\sim (P \vee Q)$ önermesi, $P \vee Q$ önermesinin tamamının olumsuzunu ifade eder.

Alıştırmalar

Aşağıda, $1-9$ arasındaki problemlerde verilen mantıksal önermelerin doğruluk tablolarını yazınız:

1. $P \vee (Q \Rightarrow R)$
2. $(Q \vee R) \Leftrightarrow (R \wedge Q)$
3. $\sim (P \Rightarrow Q)$
4. $\sim (P \vee Q) \vee (\sim P)$
5. $(P \wedge \sim P) \vee Q$
6. $(P \wedge \sim P) \wedge Q$
7. $(P \wedge \sim P) \Rightarrow Q$
8. $P \vee (Q \wedge \sim R)$
9. $\sim (\sim P \wedge \sim Q)$
10. Kabul edelim ki $\big((P \wedge Q) \vee R\big) \Rightarrow (R \vee S)$ önemesi yanlış olsun. Buna göre P, Q, R ve S önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz. (Bu soru, doğruluk tablosu olmadan çözülebilir.)
11. Kabul edelim ki P yanlış fakat $(R \Rightarrow S) \Leftrightarrow (P \wedge Q)$ önermesi doğru olsun. Buna göre R ve S önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz. (Bu soru, doğruluk tablosu olmadan çözülebilir.)

2.6 Mantıksal Denklik

$P \Leftrightarrow Q$ önermesinin doğruluk tablosu üzerinde kafa yorarken, P ve Q önermelerinin her ikisi de doğru ya da her ikisi de yanlış olduğunda $P \Leftrightarrow Q$ önermesinin doğru olduğunu muhtemelen fark etmişsinizdir. Başka bir deyişle $P \wedge Q$ veya $\sim P \wedge \sim Q$ önermelerinden az biri doğru olduğu zaman, $P \Leftrightarrow Q$ önermesi de doğrudur. Bu bizi $P \Leftrightarrow Q$ önermesinin $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$ ile aynı anlama geldiğini söylemeye teşvik eder.

Bunun gerçekten böyle olup olmadığını görmek için $P \Leftrightarrow Q$ ile $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$ önermelerinin doğruluk tabloları yazabiliriz. Bu işi yaparken, her iki önermeyi de aşağıdaki gibi aynı tabloya yerleştirmek daha verimlidir. (Bu tablo $\sim P$, $\sim Q$, $P \wedge Q$ ve $\sim P \wedge \sim Q$ ara önermeleri için yardımcı sütunlara sahiptir.)

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \wedge Q$	$\sim P \wedge \sim Q$	$(P \vee Q) \wedge (\sim P \wedge \sim Q)$	$P \Leftrightarrow Q$
D	D	Y	Y	D	Y	**D**	**D**
D	Y	Y	D	Y	D	**Y**	**Y**
Y	D	D	Y	Y	D	**Y**	**Y**
Y	Y	D	D	Y	D	**D**	**D**

Bu tablo, P ve Q değerleri ne olursa olsun, $P \Leftrightarrow Q$ ve $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$ önermelerinin aynı doğruluk değerlerine sahip olduğunu göstermektedir. Bir başka deyişle, P ve Q değişkeleri için hangi değerler "girilirse" girilsin, $P \Leftrightarrow Q$ ve $(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$ birbirine eşit olan cebirsel ifadeler gibidir. Bu durumu, yazıyla

$$P \Leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)$$

şeklinde ifade ederiz ve bu önermelerinin **mantıksal olarak denk** olduklarını söyleriz.

Genelleyecek olursak, doğruluk tablosundaki doğruluk değerleri satır satır birbirine eşit olan iki önerme **mantıksal olarak denktir**.

Mantıksal denklik önemlidir çünkü bize aynı şeye farklı (ve potansiyel olarak yararlı) açılardan bakma olanağı sağlar. Örneğin aşağıdaki tablo, $P \Rightarrow Q$ önermesinin mantıksal olarak $\sim Q \Rightarrow \sim P$ önermesine denk olduğunu gösterir.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$	$P \Rightarrow Q$
D	D	Y	Y	**D**	**D**
D	Y	Y	D	**Y**	**Y**
Y	D	D	Y	**D**	**D**
Y	Y	D	D	**D**	**D**

Bir çok teorem $P \Rightarrow Q$ formunda olduğu için $P \Rightarrow Q = (\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$ sonucu yararlıdır. Ünite 5'de göreceğimiz üzere böyle bir teoremi ispatlamak, onu mantıksal olarak ona denk olan $(\sim Q) \Rightarrow (\sim P)$ önermesi olarak ifade ettiğimizde daha kolay olabilir.

Mantıksal olarak birbirine denk olan özel iki tane önereme, bu kitapta ve onun ötesinde sık sık ortaya çıkar. Bunlar, özel bir isimle adlandırılacak kadar yaygındır: **DeMorgan yasaları**.

Gözlem 2.1. ***(DeMorgan yasaları)***

1. $\sim (P \wedge Q) = (\sim P) \vee (\sim Q)$
2. $\sim (P \vee Q) = (\sim P) \wedge (\sim Q)$

DeMorgan yasalarının ilki aşağıdaki tabloda doğrulanmıştır. Alıştırmalardan birinde, ikinci yasayı doğrulamanız istenecektir.

P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$P \wedge Q$	$\sim (P \wedge Q)$	$(\sim P) \wedge (\sim Q)$
D	D	Y	Y	D	**Y**	**Y**
D	Y	Y	D	Y	**D**	**D**
Y	D	D	Y	Y	**D**	**D**
Y	Y	D	D	Y	**D**	**D**

DeMorgan yasaları aslında çok doğal ve sezgiseldir. *Hem P hem de Q önermesinin doğru olmasının söz konusu olmaması* şekline yorumlanabilecek $\sim(P \wedge Q)$ önermesini göz önüne alalım. Eğer P ve Q aynı anda doğru değil ise P ve Q'dan en az bir yanlıştır. Bu ise $(\sim P) \vee (\sim Q)$ önermesinin doğru olması anlamına gelir. Böylelikle $\sim(P \wedge Q)$ ve $(\sim P) \vee (\sim Q)$ önermeleri aynı şeyi ifade eder.

DeMorgan yasaları çok kullanışlı olabilir. Örneğin, $\sim(P \vee Q)$ formuna sahip bir önermenin doğru olduğunu bildiğimizi kabul edelim. DeMorgan yasalarından ikincisi, $(\sim Q) \wedge (\sim P)$ önermesinin de doğru olduğunu ve dolayısıyla $\sim P$ ve $\sim Q$ önermelerinin her ikisinin de doğru olduğunu söyler. Bu tür ek bilgileri hızlıca elde etmek son derece yararlı olabilir.

Aşağıda, bazı önemli mantıksal denkliklerin bir özeti verilmiştir. Doğruluğu hemen belli olmayanlar, bir doğruluk tablosuyla doğrulanabilir.

$$P \Rightarrow Q = (\sim Q) \Rightarrow (\sim P) \qquad \text{Karşıt ters kuralı} \qquad (2.1)$$

$$\left.\begin{aligned} \sim(P \wedge Q) &= (\sim P) \vee (\sim Q) \\ \sim(P \vee Q) &= (\sim P) \wedge (\sim Q) \end{aligned}\right\} \qquad \text{DeMorgan kuralı} \qquad (2.2)$$

$$\left.\begin{aligned} P \wedge Q &= Q \wedge P \\ P \vee Q &= Q \vee P \end{aligned}\right\} \qquad \text{Değişme kuralı} \qquad (2.3)$$

$$\left.\begin{aligned} P \wedge (Q \vee R) &= (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ P \vee (Q \wedge R) &= (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \end{aligned}\right\} \qquad \text{Dağılma kuralı} \qquad (2.4)$$

$$\left.\begin{aligned} P \wedge (Q \wedge R) &= (P \wedge Q) \wedge R \\ P \vee (Q \vee R) &= (P \vee Q) \vee R \end{aligned}\right\} \qquad \text{Birleşme kuralı} \qquad (2.5)$$

Dikkat edilirse $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ olarak verilen dağılma özelliği, cebirdeki $p \cdot (q+r) = p \cdot q + p \cdot r$ dağılma özelliğine benzer. Birleşme özelliğindeki $P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$ eşitliği, buradaki parantez kullanımının gereksiz olduğunu belirtir. Bunu, belirsizliğe yer olmayacak şekilde $P \wedge Q \wedge R$ olarak yazabiliriz. Benzer şekilde $P \vee (Q \vee R)$ ifadesindeki parantezi kaldırabiliriz.

Lakin, $P \vee (Q \wedge R)$ önermesinde olduğu gibi, $\wedge$ ve $\vee$ bağlaçlarının karışık olarak kullanıldıkları durumlarda parantez gereklidir. Gerçekten de $P \vee (Q \wedge R)$ ve $(P \vee Q) \wedge R)$ önermeleri mantıksal olarak denk değildir. (Bölüm 2.6'nın aşağıda verilen 13. alıştırmasına bakınız.)

Alıştırmalar

A. Doğruluk tablosu kullanarak, aşağıdaki önermelerin mantıksal olarak denk olduklarını gösteriniz.

1. $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
2. $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
3. $P \Rightarrow Q = (\sim P) \vee Q$
4. $\sim(P \vee Q) = (\sim P) \wedge (\sim Q)$
5. $\sim(P \vee Q \vee R) = (\sim P) \wedge (\sim Q) \wedge (\sim R)$
6. $\sim(P \wedge Q \wedge R) = (\sim P) \vee (\sim Q) \vee (\sim R)$

7. $P \Rightarrow Q = (P \wedge \sim Q) \Rightarrow (Q \wedge \sim Q)$

8. $\sim P \Leftrightarrow Q = (P \Rightarrow \sim Q) \wedge (\sim Q \Rightarrow P)$

B. Aşağıda verilen önerme çiftlerinin mantıksal olarak denk olup olmadıklarına karar veriniz.

10. $P \wedge Q$ ile $\sim(\sim P \vee \sim Q)$

11. $(P \Rightarrow Q) \vee R$ ile $\sim((P \wedge \sim Q) \wedge \sim R)$

12. $(\sim P) \wedge (P \Rightarrow Q)$ ile $\sim(Q \Rightarrow P)$

13. $\sim(P \Rightarrow Q)$ ile $P \wedge \sim Q$

14. $P \vee (Q \wedge R)$ ile $(P \vee Q) \wedge R$

15. $P \wedge (Q \vee \sim Q)$ ile $(\sim P) \Rightarrow (Q \wedge \sim Q)$

2.7 Niceleyiciler

Birçok cümleyi $\wedge$, $\vee$, $\sim$, $\Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ sembollerini kullanarak sembolik forma ayrıştırabiliriz. Daha önce gördüğümüz üzere bu sembolik form, cümlelerin mantıksal yapısını ve (mantıksal denklikte olduğu gibi) farklı cümlelerin gerçekte nasıl aynı anlama sahip olabileceğini anlamamıza yardımcı olabilir.

Ancak bu semboller tek başına her önermenin tam anlamını ifade edecek kadar güçlü değildir. Bu zorluğun üstesinden gelmek için yaygın olarak kullanılan matematiksel sözcüklere karşılık gelen iki sembol vardır: $\forall$ sembolü "*her*" ya da "*bütün*" anlamına gelir; $\exists$ sembolü ise "*vardır*" anlamında kullanılır. Böylece,

Her $n \in \mathbb{Z}$ için $2n$ çifttir.

önermesi aşağıdakilerden biriyle ifade edilebilir:

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $2n$ çifttir,

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $Ç(2n)$.

Benzer şekilde,

Doğal sayılar kümesinin $|X| = 5$ olacak şekilde bir X altkümesi vardır.

önermesi

$$\exists X, (X \subseteq \mathbb{N}), |X| = 5 \quad \text{veya} \quad \exists X \subseteq \mathbb{N}, |X| = 5 \quad \text{ya da} \quad \exists X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), |X| = 5.$$

olarak ifade edilebilir.

Buradaki $\forall$ ve $\exists$ sembolleri **niceleyiciler** olarak adlandırılır çünkü bunlar, bir anlamda, kendilerini takip eden değişkenin miktarına (yani tamamına veya bir kısmına) atıfta bulunur. Buna göre $\forall$ sembolüne **evrensel niceleyici**, $\exists$ sembolüne ise **varlıksal niceleyici** denir. Bu sembolleri içeren önermeler **nicelenmiş** önermeler olarak adlandırılır. Bir önerme $\forall$ ile başlıyorsa ona **evrensel olarak nicelenmiş** önerme, $\exists$ ile başlıyorsa **varlıksal olarak nicelenmiş** önerme denir.

Örnek 2.5. Aşağıdaki sözel önermeler, sembolik formları ile eşleştirilmiştir.

Tek olmayan her tamsayı çifttir.
$\forall n \in \mathbb{Z}, \sim(n \text{ tektir}) \Rightarrow (n \text{ çifttir})$ veya $\forall n \in \mathbb{Z}, \sim T(n) \Rightarrow Ç(n)$.

Çift olmayan bir tamsayı vardır.
$\exists n \in \mathbb{Z}, \sim Ç(n)$.

Her x reel sayısı için öyle bir y reel sayısı vardır ki $y^3 = x$ olur.
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^3 = x$.

Herhangi iki a ve b rasyonel sayıları için ab rasyoneldir.
$\forall a, b \in \mathbb{Q}, ab \in \mathbb{Q}$.

Bir S kümesi verilsin. (Bu küme $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ vb. bir kümedir ancak sadece bunlarla sınırlı değildir.) Eğer her $x \in S$ için $P(x)$ önermesi doğru ise buradan $\forall x \in S, P(x)$ nicelenmiş önermesin doğru olduğu anlaşılır. Eğer $P(x)$ önermesini yanlış yapan en az bir $x \in S$ var ise $\forall x \in S, P(x)$ önermesi yanlıştır. Benzer şekilde, $P(x)$ doğru olacak şekilde en az bir $x \in S$ var ise $\exists x \in S, P(x)$ önermesi doğrudur; aksi halde yanlıştır. Böylece, Örnek 2.5'deki her önerme doğrudur. Aşağıda, nicelenmiş yanlış önerme örnekleri verilmiştir.

Örnek 2.6. Sembolik formları ile eşleştirilmiş aşağıdaki önermeler yanlıştır.

Her tamsayı çifttir.
$\forall n \in \mathbb{Z}, Ç(n)$.

Bir n tamsayısı vardır öyle ki $n^2 = 2$ olur.
$\exists n \in \mathbb{Z}, n^2 = 2$.

Her x reel sayısı için öyle bir y reel sayısı vardır ki $y^2 = x$ olur.
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 = x$.

Herhangi iki a ve b rasyonel sayıları için $\sqrt{ab}$ rasyoneldir.
$\forall a, b \in \mathbb{Q}, \sqrt{ab} \in \mathbb{Q}$.

Örnek 2.7. İki tane niceleyici içeren önermelerde, niceleyicilerin sırasına dikkat edilmelidir çünkü sıralamayı değiştirmek anlam değişmesine neden olabilir. Örnek 2.5'te verilen aşağıdaki önermeyi göz önüne alalım:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^3 = x.$$

Bu önerme doğrudur çünkü x ne olursa olsun $y = \sqrt[3]{x}$ sayısı için $y^3 = x$ olur. Şimdi niceleyicilerin sırasını değiştirip önermeyi yeniden yazalım:

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y^3 = x.$$

Yeni önerme, belirli bir y reel sayısı vardır öyleki *her* x reel sayısı için $y^3 = x$ olduğunu söyler. Bu özelliğe sahip bir sayı var olamayacağı için yeni önerme yanlıştır. Yukarıdaki iki önermenin anlamları tamamen farklıdır.

Nicelenmiş önermeler gündelik konuşmalarda genellikle yanlış kullanılır. Muhtemelen birilerinin *"Öğrenim harcı ödeyenler, örencilerin hepsi değildir."* demek isterken *"Bütün öğrenciler öğrenim harcı ödemez."* dediğini duymuşsunuzdur. Gündelik konuşmalarda belki affedilebilir olan bu hata matematikte asla yapılmamalıdır. *"Bütün tamsayılar çift değildir."* dememelisiniz çünkü bu hiçbir çift tamsayının bulunmadığı anlamına gelir. Bunun yerine *"Çift sayılar, tamsayıların hepsi değildir."* diyebilirsiniz.

Alıştırmalar

Aşağıdakileri birer cümle olarak yazınız. Doğru ya da yanlış olduklarını belirtiniz.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x^n \geqslant 0$
3. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, ax = x$
4. $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), X \subseteq \mathbb{R}$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), |X| < n$
6. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), |X| < n$
7. $\forall X \subseteq \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{Z}, |X| = n$
8. $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists X \subseteq \mathbb{N}, |X| = n$
9. $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z}, m = n + 5$
10. $\exists m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{Z}, m = n + 5$

2.8 Koşullu Önermeler Üzerine Daha Fazlası

Değişken içeren koşullu önermeler hakkındaki çok önemli bir noktayı ele almanın zamanı geldi. Bunun için x tamsayıları hakındaki aşağıdaki örneğe geri dönelim:

$$(x \text{ tamsayısı 6'nın bir katıdır}) \Rightarrow (x \text{ tamsayısı çifttir}).$$

Daha önce de belirtildiği üzere 6'nın her katı çift olduğu için x tamsayısı ne olursa olsun bu önerme doğrudur. Bu gözleme vurgu yaparak, önermeyi aşağıdaki formda yazabiliriz:

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (x \text{ tamsayısı 6'nın bir katıdır}) \Rightarrow (x \text{ tamsayısı çifttir}).$$

Şimdi, cümlelerin yerlerini değiştirerek farklı bir önerme yazalım:

$$(x \text{ tamsayısı çifttir}) \Rightarrow (x \text{ tamsayısı 6'nın bir katıdır}).$$

Bu ifade, x tamsayısının $-6, 12, 18$ vb. gibi bazı değerleri için doğrudur ancak ($2, 4$ vb. gibi) diğer değerleri için yanlıştır. Dolayısıyla, bu bir önerme olmaktan ziyade bir açık önermedir. (Bölüm 2.1'den, bir *açık önermenin* doğruluk değerinin belirli bir değişkenin veya değişkenlerin değerine bağlı olduğunu hatırlayınız.) Ancak bunun önüne evrensel bir niceleyici koyduğumuzda

$$\forall x \in \mathbb{Z}, (x \text{ tamsayısı çifttir}) \Rightarrow (x \text{ tamsayısı 6'nın bir katıdır})$$

elde ederiz ki bu kesinlikle yanlıştır. Bu nedenle bu son ifade bir önermedir yani bir *açık önerme değildir*. Genelleyecek olursak, bir x tamsayısı hakkında verilen $P(x)$ ve $Q(x)$ açık önermeleri için $\forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \Rightarrow Q(x)$ ifadesi ya doğrudur ya da yanlıştır. Bu yüzden bu ifade bir önermedir; bir açık önerme değildir.

Şimdi çok önemli noktaya geldik. Matematikte, $P(x)$ ve $Q(x)$ herhangi bir S kümesinin x elemanı hakkındaki açık önermeler olduğunda, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ ifadesi $\forall x \in S, P(x) \Rightarrow Q(x)$ *önermesi* olarak anlaşılır. Başka bir deyişle, koşullu bir önermede açıkça belirtilmemiş olsa bile onun önünde gizli bir evrensel niceleyici vardır. Bunun sebebi şudur: $\forall x \in S, P(x) \Rightarrow Q(x)$ formundaki önemleler matematikte o kadar yaygındır ki onların önüne $\forall x \in S$ koymaktan yoruluruz.

Dolayısıyla aşağıdaki cümle (bütün x değerleri için doğru olduğundan) doğru bir önermedir:

Eğer x tamsayısı 6'nın bir katı ise x çifttir.

Benzer şekilde, bir sonraki cümle (bütün x değerleri için doğru olmadığından) yanlış bir önermedir:

Eğer x tamsayısı çift ise x tamsayısı 6'nın bir katıdır.

Bu gözlem, bizi koşullu önermelerin Bölüm 2.3'de verilen yorumu ile tutarlı ancak ondan daha genel olan aşağıdaki yorumuna yönlendirir:

Tanım 2.1. *Eğer P ve Q iki önerme ya da açık önerme ise*

"Eğer P ise Q,"

bir önermedir. Eğer P doğruyken Q'nun yanlış olması imkansız ise bu önerme doğrudur. Eğer P'nin doğru olduğu ancak Q'nun yanlış olduğu en az bir durum var ise bu önerme yanlıştır.

Böylece aşağıdaki önermeler **doğrudur**:

Eğer $x \in \mathbb{R}$ ise $x^2 + 1 > 0$ olur.

Eğer bir f fonksiyonu diferansiyellenebilir ise f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.

Benzer şekilde, aşağıdaki önermeler **yanlıştır**:

Eğer p asal ise p tektir. (2 asal sayıdır.)

Eğer f rasyonel bir fonksiyon ise f fonksiyonunun bir asimptotu vardır. (x^2 rasyoneldir.)

2.9 Yazı Dilinin Sembolik Mantığa Çevirilmesi

Teoremlerin ispatlarını yazarken (ve okurken), cümlelerin mantıksal yapısına ve anlamlarına daima dikkat etmeliyiz. Bazen bunları mantık sembolleri içeren ifadelere ayrıştırmak gerekir ya da bunu yapmak yardımcı olur. Bu iş, zihinsel olarak ya da bir karalama kâğıdı üzerinde yapılabilir. Bazen de bir ispatın içinde açık bir şekilde yapılabilir. Bu bölümün amacı, mantıksal yapılarını daha iyi anlayabilmeniz için, yazı dilindeki cümleleri sembolik forma aktarabilecek yeterli pratiği kazandırmaktır. İşte bazı örnekler:

Örnek 2.8. Analiz dersinde gördüğünüz ortalama değer teoremini ele alalım:

> Eğer bir f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında diferansiyellenebilir ise $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ vardır.

Bu cümlenin sembolik formu şu şekildedir:

$$\Big(\big(f, [a,b] \text{ aralığında sürekli}\big) \wedge \big(f, (a,b) \text{ aralığında dif.bilir}\big)\Big) \Rightarrow \Big(\exists\, c \in (a,b), f'(c) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big).$$

Örnek 2.9. Bölüm 2.1'de verilen Goldbach sanısını göz önüne alalım:

> 2'den büyük her çift tamsayı, iki asal sayının toplamıdır.

Asal sayılar kümesi P ve 2'den büyük çift sayılar kümesi $S = \{4, 6, 8, 10, \ldots\}$ olmak üzere bu cümle aşağıdaki şekillerde sembolik mantık diline aktarılabilir.

$$\big(n \in S\big) \Rightarrow \big(\exists\, p, q \in P, n = p + q\big)$$

$$\forall n \in S, \exists\, p, q \in P, n = p + q$$

Goldbach sanısının bu ifadeleri önemli bir noktayı gösterir. Birinci aktarım, $(n \in S) \Rightarrow Q(n)$ yapısına, ikinci aktarım ise $\forall n \in S, Q(n)$ yapısına sahiptir ancak bunların her ikisinin anlamı aynıdır. Bu önemlidir. Evrensel olarak nicelenmiş her önerme, koşullu bir önerme olarak ifade edilebilir.

Gözlem 2.2. *Kabul edelim ki S bir küme ve $Q(x)$ ise her $x \in S$ için bir x hakkındaki önerme olsun. Aşağıdaki önermeler aynı şeyi ifade eder:*

- $\forall x \in S, Q(x)$
- $(x \in S) \Rightarrow Q(x)$.

Bu gözlem oldukça önemlidir çünkü birçok teorem koşullu bir önerme formundadır. (Ortalama Değer Teoremi buna bir örnektir!) Bir teoremin ispatında, onun neyi ifade ettiğini dikkatlice düşünmeliyiz. Bazen bir teorem, evrensel olarak nicelenmiş bir önerme olarak verilir fakat onu koşullu bir önerme olarak düşünmek daha kullanışlı olabilir. Yukarıdaki gözlemi anlamak, bu iki form arasında geçiş yapabilmemize olanak verir.

Bu bölümü son bir kaç noktaya temas ederek bitirelim. Bir önermeyi sembolik mantık diline aktarırken, amaçlanan anlamına dikkat etmelisiniz. Örneğin, otomatik olarak atlayıp gördüğünüz her "ve" kelimesini $\wedge$, her "veya" kelimesini de $\vee$ ile değiştirmemelisiniz. İşte bir örnek:

x ve y tamsayılarından en az biri çifttir.

Buradaki "ve" kelimesinin varlığı sizi yanlış yola saptırmasın. Bu önermenin anlamı, sayılardan birinin veya her ikisinin de çift olmasıdır. Bu yüzden "ve" değil "veya" kullanılması gerekir:

(x çifttir) $\vee$ (y çifttir).

Son olarak "ancak" kelimesinin mantıksal anlamını "ve" kelimesi karşılayabilir. Örneğin "*x çifttir ancak y tektir*" cümlesi şu şekilde sembolik mantık diline aktarılır:

(x çifttir) $\wedge$ (y tektir).

Alıştırmalar

Aşağıdaki cümlelerin her birini sembolik mantık diline çeviriniz.

1. Eğer f derecesi 2'den büyük bir polinom ise f' sabit değildir.
2. x pozitiftir fakat y pozitif değildir.
3. Eğer x asal sayı ise $\sqrt{x}$ rasyonel sayı değildir.
4. Her p asal sayısına karşılık, $q > p$ olacak şekilde başka bir q asal sayısı vardır.
5. Her ε pozitif sayısına karşılık, $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir δ sayısı vardır.
6. Her ε pozitif sayısına karşılık, $x > M$ olduğunda $|f(x) - b| < \varepsilon$ olacak şekilde bir M pozitif sayısı vardır.
7. Her x reel sayısı için $a + x = x$ olacak şekilde bir a reel sayısı vardır.
8. Yüzü olan hiçbir şeyi yemiyorum.
9. Eğer x bir rasyonel sayı ve $x \neq 0$ ise $\tan x$ bir rasyonel sayı değildir.
10. Eğer $\sin(x) < 0$ ise $0 \leqslant x \leqslant \pi$ olamaz.
11. Aptalları, sarhoşları, çocukları ve Amerika Birleşik Devletleri'ni koruyan bir ilahi taktir vardır. (Otto von Bismarck)

12. Bazı insanları her zaman kandırabilirsiniz; bütün insanları bazı zamanlarda kandırabilirsiniz ama her zaman bütün insanları kandıramazsınız. (Abraham Lincoln)

13. Bir başkasının başına geldiği sürece herşey komiktir

2.10 Önermelerin Olumsuzlaştırılması

Bir R önermesi verildiğinde, $\sim R$ önermesine R'nin **değili** veya **olumsuzu** denir. Eğer R karmaşık bir önerme ise R'nin değili çoğu zaman daha sade veya kullanışlı bir formda yazılabilir. Bu formu bulma süreci, R'nin **olumsuzlaştırılması** olarak adlandırılır. Teoremleri ispatlarken, genellikle belirli önermelerin olumsuzlaştırılması gerekir. Şimdi bunu nasıl yapacağımızı araştıralım.

Bu konunun bir bölümünü zaten inceledik. Bölüm 2.6'da verilen

$$\sim(P \wedge Q) = (\sim P) \vee (\sim Q) \tag{2.6}$$

$$\sim(P \vee Q) = (\sim P) \wedge (\sim Q) \tag{2.7}$$

DeMorgan yasaları, $P \wedge Q$ ve $P \vee Q$ önermelerinin nasıl olumsuzlaştırılacağını gösteren kurallar olarak düşünülebilir. Şimdi, DeMorgan kurallarının "ve" ya da "veya" içeren önermeleri olumsuzlaştırmak için nasıl kullanıldığına dair bazı örnekler verelim.

Örnek 2.10. Aşağıdaki önermeyi olumsuzlaştırmak istediğimizi düşünelim:

R: Çarpanlarına ayırarak veya kuadratik formülü kullanarak çözebilirsiniz.

R önermesi, (Çarpanlarına ayırarak çözebilirsiniz.) $\vee$ (Kuadratik formülü kullanarak çözebilirsiniz.) anlamına gelir. Bunu $P \vee Q$ olarak gösterirsek olumsuzu

$$\sim(P \vee Q) = (\sim P) \wedge (\sim Q)$$

ile verilir. Bu nedenle, R önermesinin değili

$\sim R$: Çarpanlarına ayırarak çözemezsiniz ve kuadratik formülü kullanarak çözemezsiniz.

önermesidir. Belki, $\sim R$ önermesini DeMorgan kurallarını düşünmeden de bulabilirsiniz. Bu iyiye işarettir çünkü DeMorgan yasalarını özümsediğinizi ve bunu bilinçaltından kullandığınızı gösterir.

Örnek 2.11. Aşağıdaki önermeyi olumsuzlaştıralım:

$R : x$ ve y sayılarının her ikisi de tektir.

Bu önerme, (x tektir) $\wedge$ (y tektir) anlamına gelir. Buna göre olumsuzu

$$\begin{aligned}\sim\big((x \text{ tektir}) \wedge (y \text{ tektir})\big) &= \sim(x \text{ tektir}) \vee \sim(y \text{ tektir}) \\ &= (x \text{ çifttir}) \vee (y \text{ çifttir})\end{aligned}$$

ile verilir. Bu nedenle R'nin değili aşağıdaki şekillerde ifade edilebilir:

$\sim R$: x çifttir veya y çifttir.

$\sim R$: x ve y sayılarından en az biri çifttir.

Şimdi biraz farklı bir soru tipine bakalım. Çoğu zaman, nicelenmiş önermelerin değillerinin bulunması gerekir. Örneğin, $\sim(\forall x \in \mathbb{N}, P(x))$ önermesini ele alalım. Bu önermeyi sözel olarak şu şekilde ifade edebiliriz:

$P(x)$ önermesinin bütün x doğal sayıları için doğru olması söz konusu değildir.

Bu ifade, en az bir tane x için $P(x)$ önermesinin yanlış olması anlamına gelir. Sembolik olarak $\exists\, x \in \mathbb{N}, \sim P(x)$ yazabiliriz. Böylece $\sim(\forall x \in \mathbb{N}, P(x)) = \exists\, x \in \mathbb{N}, \sim P(x)$ olur. Genellersek,

$$\sim(\forall x \in S, P(x)) = \exists\, x \in S, \sim P(x), \tag{2.8}$$

$$\sim(\exists\, x \in S, P(x)) = \forall x \in S, \sim P(x). \tag{2.9}$$

Örnek 2.12. Aşağıdaki önermeyi olumsuzlaştırmak istediğimizi düşünelim:

R : Bütün reel sayıların karesi negatif değildir.

Bu önerme, sembolik olarak $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$ biçiminde yazılabilir. Böylece, R önermesinin değili $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0) = \exists\, x \in \mathbb{R}, \sim(x^2 \geqslant 0) = \exists\, x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ ile verilir. Bunu sözel olarak ifade edelim:

$\sim R$: Öyle bir reel sayı vardır ki bu sayının karesi negatiftir.

Dikkat edileceği üzere R doğrudur fakat $\sim R$ yanlıştır. Yukarı yaptığımız gibi, Eşitlik (2.8)'i kullanamadan da $\sim R$ önermesini bulabilirsiniz. Eğer öyleyse bu iyidir; değilse, muhtemelen bunu yakında yapabileceksiniz.

Bir öneme birden fazla niceleyici içeriyorsa onu olumsuzlaştırmak için Eşitlik (2.8) ve (2.9)'un ard arda birçok defa kullanılması gerekebilir. Aşağıdaki önermeyi göz önüne alalım:

S : Her x reel sayısı için öyle bir y reel sayısı vardır ki $y^3 = x$ olur.

Bu önerme, herhangi bir x reel sayısının küp köke sahip olduğunu iddia eder ki bu doğrudur. Sembolik olarak, S önermesi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^3 = x$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi bu önermenin olumsuzu üzerinde çalışalım:

$$\begin{aligned}\sim(\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, y^3 = x) &= \exists\, x \in \mathbb{R}, \sim(\exists\, y \in \mathbb{R}, y^3 = x)\\ &= \exists\, x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \sim(y^3 = x)\\ &= \exists\, x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^3 \neq x\end{aligned}$$

Böylece, verilen önermenin değili aşağıdaki (yanlış) önermedir.

Bir x reel sayısı vardır öyle ki bütün y reel sayıları için $y^3 \neq x$ olur.

İspatları yazarken, bazen $P \Rightarrow Q$ koşullu önermesini olumsuzlaştırmanız gerekir. Bu bölümün geri kalan kısmı bunu nasıl yapacağınızı açıklar. Başlamak için *"$P \Rightarrow Q$ yanlıştır"* diyen $\sim(P \Rightarrow Q)$ önermesini ele alalım. Doğruluk tablosundan bildiğimiz üzere $P \Rightarrow Q$ önermesinin yanlış olmasının tek yolu, P'nin doğru fakat Q'nun yanlış olmasıdır. Bu nedenle

$$\sim(P \Rightarrow Q) = P \wedge \sim Q \tag{2.10}$$

olur. (Aslında, Bölüm 2.6'daki Alıştırma 12'de, bu iki önermenin mantıksal olarak denk olduklarını göstermek için bir doğruluk tablosu kullandınız.)

Örnek 2.13. Belirli bir a (sabit) sayısı hakkında aşağıda verilen önermeyi olumsuzlaştıralım.

R : Eğer a tek sayı ise a^2 de tek sayıdır.

Eşitlik (2.10)'u kullanarak, aşağıdaki olumsuz önermeyi elde ederiz.

$\sim R$: a tek sayıdır ve a^2 tek sayı değildir.

Örnek 2.14. Bu örnek bir öncekine benzer ancak a sabit sayısının yerine x değişkeni kullanır. Aşağıdaki önermeyi olumsuzlaştıralım.

R : Eğer x tek sayı ise x^2 de tek sayıdır.

Bölüm 2.8'de bahsedildiği üzere bu önermeyi, evrensel olarak nicelenmiş

$R : \forall x \in \mathbb{Z}, (x \text{ tek sayıdır}) \Rightarrow (x^2 \text{ tek sayıdır})$

önermesi olarak yorumlarız. Eşitlik (2.8) ve (2.10)'den R'nin değili olarak

$$\begin{aligned}\sim\big(\forall x \in \mathbb{Z}, (x \text{ tek sayıdır}) \Rightarrow (x^2 \text{ tek sayıdır})\big) &= \exists\, x \in \mathbb{Z}, \sim\big((x \text{ tek sayıdır}) \Rightarrow (x^2 \text{ tek sayıdır})\big)\\ &= \exists\, x \in \mathbb{Z}, (x \text{ tek sayıdır}) \wedge \sim(x^2 \text{ tek sayıdır})\end{aligned}$$

önermesini elde ederiz. Bunu sözel olarak ifade edelim:

$\sim R$: Karesi tek sayı olmayan bir tek tamsayı vardır.

Dikkat edileceği üzere R doğrudur fakat $\sim R$ yanlıştır.

Yukarıda verilen Örnek 2.14, koşullu formda verilen $P \Rightarrow Q$ önermesinin nasıl olumsuzlaştırılacağını gösterir. Bu tür bir problem, bazen daha karmaşık olumsuzlaştırma problemleri içinde ortaya çıkabilir. Aşağıda verilen Alıştırma 5'e (ve çözümüne) bakınız.

Alıştırmalar

Aşağıdaki önermeleri olumsuzlaştırınız.

1. x pozitiftir fakat y pozitif değildir.
2. Eğer x asal sayı ise $\sqrt{x}$ rasyonel sayı değildir.
3. Her p asal sayısına karşılık, $q > p$ olacak şekilde başka bir q asal sayısı vardır.
4. Her ε pozitif sayısına karşılık, $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir δ sayısı vardır.
5. Her ε pozitif sayısına karşılık, $x > M$ olduğundan $|f(x) - b| < \varepsilon$ olacak şekilde bir M pozitif sayısı vardır.
6. Her x reel sayısı için $a + x = x$ olacak şekilde bir a reel sayısı vardır.
7. Yüzü olan hiçbir şeyi yemiyorum.
8. Eğer x bir rasyonel sayı ve $x \neq 0$ ise $\tan x$ bir rasyonel sayı değildir.
9. Eğer $\sin(x) < 0$ ise $0 \leqslant x \leqslant \pi$ olamaz.
10. Eğer f derecesi 2'den büyük olan bir polinom ise f' sabit değildir.
11. Bütün insanları her zaman kandırabilirisiniz.
12. İki kötülük arasında bir seçim yapmak zorunda kaldığımda, henüz denemediğim şeyi seçerim. (Mae West)

2.11 Mantıksal Çıkarım

$P \Rightarrow Q$ formundaki bir önermenin doğru olduğunu bildiğimizi varsayalım. Bu önerme bize, P ne zaman doğruysa o zaman Q'nun da doğru olacağını söyler. Ancak $P \Rightarrow Q$ önermesinin kendi başına doğru olması, P'nin veya Q'nun doğru olduğunu söylemez (her ikisi birden yanlış ya da P yanlış,

Q doğru olabilir). Bununla birlikte, P önermesinin doğru olduğu biliniyor ise o zaman Q'nun da doğru olması gerekir. Buna **mantıksal çıkarım** denir: Doğru olduğu bilinen iki önerme verildiğinde, üçüncü bir önermenin doğru olduğu sonucuna ulaşabiliriz. Böylece $P \Rightarrow Q$ ve P doğru önermeleri "üst üste eklenerek" Q önermesi elde edilir. Bu durum, $P \Rightarrow Q$ ve P alt alta yazılıp bir çizgi ile Q önermesinden ayrılarak aşağıda temsil edilmiştir. Burada anlatılmak istenilen şey, $P \Rightarrow Q$ önermesinin P ile birleşerek Q önermesini üretmesidir.

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \sim Q \\ \hline \sim P \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} P \vee Q \\ \sim P \\ \hline Q \end{array}$$

Yukarıda, başka iki tane mantıksal çıkarım daha verilmiştir. Bu iki durumda da (ilgili doğruluk tabloları bilginize dayanarak) çizginin üstündeki önermelerin doğru olmasının, çizginin altındaki önermenin de doğru olmasını gerektireceğine kendinizi ikna etmelisiniz.

Kullanışlı olan bazı ek mantıksal çıkarımlar aşağıda verilmiştir. Birincisi, P ve Q önermelerinin her ikisi de doğruysa $P \wedge Q$ önermesinin açık bir şekilde doğru olacağını ortaya koyar. Bunun yanı sıra $P \wedge Q$ doğru olduğunda P (ve aynı zamanda Q) doğrudur. Son olarak eğer P doğru ise, Q önermesi ne olursa olsun, $P \vee Q$ doğru olmalıdır.

$$\begin{array}{l} P \\ Q \\ \hline P \wedge Q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} P \wedge Q \\ \hline P \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} P \\ \hline P \vee Q \end{array}$$

Bu çıkarımlar sezgisel olarak yeterince açık olduğu için neredeyse hiçbir zaman belirtilmeleri gerekmez. Ancak bunlar, ispat cümlelerinde sıklıkla kullanacağımız belirli mantık kalıplarını temsil eder. Bu nedenle, bunları kullanırken bunun farkında olmamız gerekir.

2.12 Önemli Bir Not

Mantık üzerine çalışma sebeplerini bilmek önemlidir. Aslında bunun üç önemli nedeni vardır. Birincisi; doğruluk tablolarının "ve," "veya," "değil" vb. kelimelerin kesin anlamlarını bize söylemesidir. Örneğin, "Eğer ... ise" yapısını matematiksel bağlamda kullandığımızda, mantık bunun tam olarak ne anlama geldiğini bize bildirir. İkincisi; mantıksal çıkarım kuralları, bilinen bilgiyi kullanarak yeni bilgi (önermeler) üreteceğimiz bir sistem sunar. Son olarak; DeMorgan kanunları gibi mantıksal kurallar, belirli önermeleri yine bunlarla aynı anlama sahip (ancak daha kullanışlı) önermelere dönüştürmemize olanak sağlar. Böylece mantık, önermelerin anlamlarını kavramamıza ve anlamlı yeni önermeler türetmemize yardımcı olur.

Mantık, önermeleri bir anlamda arada tutan bir yapıştırıcıdır ve "Eğer ... ise" veya "Her" gibi anahtar niteliğindeki belirli yapıların net anlamlarını açıkça ortaya koyar. Mantık, tüm matematikçilerin kullandığı ortak dildir. Bu nedenle, matematiği anlamak ve aktarmak için onu sıkı bir şekilde kavramak gerekir.

Ancak mantık, bu temel rolüne rağmen, yaptıklarımızın ön planında değil arka planında bulunur. Bu noktadan itibaren $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\sim$, $\forall$ ve $\exists$ gibi zarif semboller nadiren yazılacaktır. Ancak bunların anlamlarının daima farkında olmamız gerekir. Matematiksel bir cümleyi okurken veya yazarken, bu sembolleri kullanarak o cümleyi zihnimizde ya da kağıt üzerinde çözümler ve böylece onun doğru ve açık anlamını kavrayabiliriz.

Bölüm 3

Sayma

Üniversite düzeyindeki bir kitabın sayma üzerine bir ünite içermesi biraz tuhaf görünebilir. Sayma, en basit haliyle, bir topluluktaki her bir nesneyi işaret edip, nesnelerin miktarını belirleyene kadar *"bir, iki, üç, ... "* diye söylemektir. Bu ne kadar zor olabilir ki? Aslında sayma işlemi oldukça karmaşık bir hal alabilir. Bu ünitede, ileri seviyedeki sayma yöntemlerini inceleyeceğiz. Amacımız *"Kaç tane?"* sorusunu cevaplamaktır. Ancak nesneleri bireysel olarak tek tek saymak yerine, bu süreci atlatan matematiksel yöntemleri anlatacağız.

Matematiğin hemen hemen her dalı "gelişmiş sayma" işleminin bir türünü kullanır. Bu sayma problemlerinin çoğu birer *liste* kullanılarak modellenebilir. Bu yüzden oradan başlayalım.

3.1 Listeleri Sayma

Liste, sıralı bir nesneler dizisidir. Bir listeyi belirtmek için önce bir parantez açılır, ardından virgülle ayrılmış nesneler yazılır ve sonra parantez kapatılır. Örneğin (a, b, c, d, e) ifadesi, İngiliz alfabesindeki ilk beş harfin sıralanmasıyla oluşan bir listedir. Bu listedeki a, b, c, d, e nesneleri listenin **girdileridir**. Listenin ilk girdisi a, ikinci girdisi b'dir ve isimlendirme bu şekilde devam eder. Eğer girdilerin sırası değiştirilirse yeni bir liste elde edilir. Örneğin,

$$(c, b, c, d, e) \neq (b, a, c, d, e).$$

Listeler kümelere benzer ancak sadece bir nesneler topluluğu olmaktan ziyade, bir listedeki girdilerin belirlilenmiş bir *sırası* vardır. Hatılanacağı üzere kümelerde

$$\{a, b, c, d, e\} = \{b, a, c, d, e\}$$

olur ancak -yukarıda belirtildiği gibi- benzer bir eşilik listeler için doğru değildir.

Kümelerin aksine, listelerin girdileri tekrar edebilir. Örneğin $(5, 3, 5, 4, 3, 3)$ ve (S, O, S) gayet makul birer listedir. Listedeki girdilerin sayısına o listenin **uzunluğu** denir. Buna göre $(5, 3, 5, 4, 3, 3)$ listesinin uzunluğu altı, (S, O, S) listesinin uzunluğu ise üçtür.

Listeleri bazen parantez ve virgül kullanmadan özensiz bir şekilde yazabiliriz. Örneğin, herhangi bir karmaşaya yol açmayacaksa (S, O, S) listesini SOS biçiminde ifade edebiliriz. Ancak bu şekildeki kullanım belirsizliğe yol açabilir. Örneğin $(9, 10, 11)$ ile 91011'in aynı olması mantıklı mıdır? Öyleyse $(9, 10, 11) = 91011 = (9, 1, 0, 1, 1)$ olur ki bu hiçbir anlam ifade etmez. Bu yüzden listelerin parantez/virgül notasyonuna hemen hemen her zaman bağlı kalacağız.

Listeler önemlidir çünkü birçok gerçek dünya problemi listeler ile tanımlanabilir ve anlaşılabilir. Örneğin, telefon numaranız (alan koduyla birlikte) on rakamlı bir liste olarak tanımlanabilir. Bu listede sıralama zorunludur çünkü rakamları yeniden düzenlenmek farklı bir telefon numarası verir. *Bayt*, önemli başka bir liste örneğidir. Bir bayt, uzunluğu sekiz olan ve 0'lar ile 1'lerden oluşan bir listedir. Bilgi teknolojileri dünyası bayt etrafında dönmektedir.

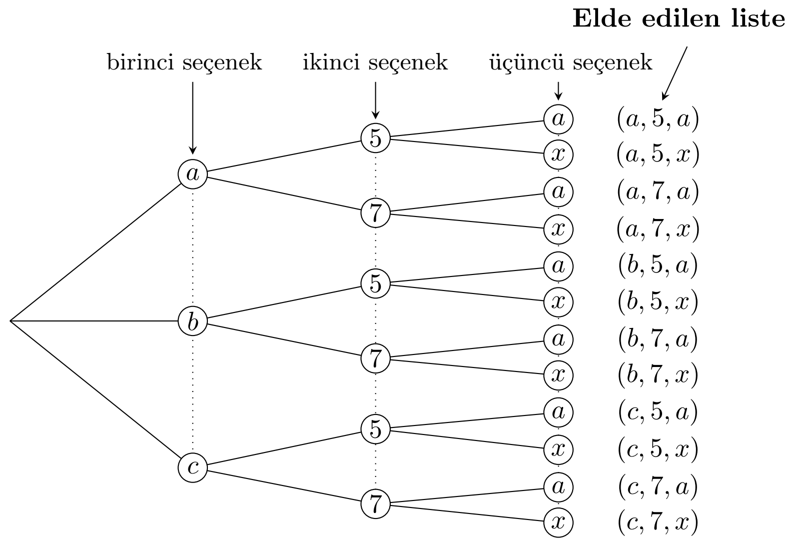
Liste örneklerine devam edelim: $(a, 15)$, uzunluğu iki olan bir listesidir. Benzer şekilde $(0, (0, 1, 1))$, uzunluğu iki olan bir listedir. Bu listenin ikinci girdisi üç uzunluğunda bir listedir. Diğer taraftan $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R})$, her bir girdisi bir küme olan üç uzunluklu bir listedir. Burada özellikle vurgulayalım ki iki listenin eşit olabilmesi için bunların, sıralamaları eşit olan aynı elemanlara sahip olmaları gerekir. Sonuç olarak, iki liste eşit ise bunların aynı uzunlukta olmaları gerekir. Bir başka deyişle, eğer iki liste farklı uzunluklara sahip ise bunlar eşit değildir. Örneğin, $(0, 0, 0, 0, 0, 0) \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ olur. Başka bir örnek olarak

$$(\mathrm{a, l, ı, ş, v, e, r, i, ş, l, i, s, t, e, s, i}) \quad \neq \quad \left(\boxed{\begin{array}{l}\text{ekmek}\\ \text{yumurta}\\ \text{süt}\\ \text{hardal}\\ \text{kahve}\end{array}} \right)$$

olduğuna dikkat edilmelidir çünkü soldaki listenin 16 girdisi sağdaki listenin ise sadece bir girdisi (üzerinde bazı kelimeler yazan bir kâğıt parçası) vardır.

Hiç bir girdisi olmayan çok özel bir liste vardır. Bu listeye **boş liste** denir ve () ile gösterilir. Bu aynı zamanda uzunluğu sıfır olan tek listedir.

Çoğu zaman bir koşulu veya özelliği sağlayan olası listelerin sayısını saymak gerekir. Örneğin ilk girdisi $\{a, b, c\}$ kümesinin, ikici girdisi $\{5, 7\}$ kümesinin ve üçüncü girdisi ise $\{a, x\}$ kümesinin elemanı olan üç uzunluğunda bir liste yapmak istediğimizi varsayalım. Dikkat edilirse $(a, 5, a)$ ve $(b, 5, a)$ bu türdeki listelerden iki tanesidir. Bu türde toplam kaç liste vardır? Bu soruyu cevaplamak için ilk önce birinci elemanı, ardından ikinciyi ve sonrasında da üçüncüyü seçtiğimizi düşünelim. Bu süreç, Şekil 3.1'de açıklanmıştır. Listenin ilk girdisi için seçenekler a, b ve c şeklindedir. Diyagramın sol tarafı, her biri bir seçeneğe karşılık gelecek biçimde üç yönde dallanır. Bu seçim yapıldıktan sonra, ikinci girdi için iki seçenek (5 veya 7) vardır. Bu seçenekler, grafiksel olarak, ilk girdi için yapılan üç seçenekten her birinin ikişer tane dal vermesiyle temsil edilir. Bu modelleme, üçüncü girdi için yapılacak olan a veya x seçimi için tekrar edilir. Böylece, diyagramın solunda sağına doğru $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ tane yol bulunur. Bunların her biri, listenin girdileri için yapılan belirli bir seçime karşılık gelir. Her bir yola karşılık gelen liste, o yolun sağ ucunda gösterilmiştir. Dolayısıyla, başlangıçta sorduğumuz soruya cevap verecek olursak belirtilen özelliklere sahip 12 olası liste vardır.



Şekil 3.1: Uzlunluğu 3 olan listelerin oluşturulması

Yukarıda kullandığımız modellemeyi, **çarpma ilkesi** olarak adlandırılan gözlem ile özetleyelim.

Gözlem 3.1 (Çarpma İlkesi)**.** *Uzunluğu n olan bir liste yapılırken; ilk girdi için a_1 tane olası seçenek, ikinci girdi için a_2 tane olası seçenek, üçüncü girdi için a_3 tane olası seçenek vb. olduğunu kabul edelim. Bu şekilde yapılabilecek birbirinden farklı liste sayısı $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$ tanedir.*

Yukarıdaki örnekte $a_1 = 3$, $a_2 = 2$ ve $a_3 = 2$ olduğu için toplam liste sayısı $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ olarak bulunmuştur. Şimdi, çarpma ilkesinin nasıl kullanılabileceğine dair bazı ek örneklere bakalım.

Örnek 3.1. Amerika Birleşik Devletleri'ndeki standart bir plaka, üç harf ve onu takip eden dört sayıdan oluşur. Örneğin, $JRB - 4412$ ve $MMX - 8901$ iki standart plakadır. ($LV2COUNT$ gibi özel plakalar, standart plakalar arasında yer almamaktadır.) Kaç tane farklı standart plaka olabilir?

Bu soruya cevaplamak için $JRB - 4412$ gibi herhangi standart bir plakanın, uzunluğu 7 olan $(J, R, B, 4, 4, 1, 2)$ listesine karşılık geldiğine dikkat edelim. Bu nedenle, bu türdeki olası listeleri sayarak soruyu cevaplayabiliriz. Çarpma ilkesini kullanalım. Listenin ilk girdisi için $a_1 = 26$ (alfabenin[1] her harfi için bir tane) seçenek vardır. Benzer şekilde ikinci girdi için $a_2 = 26$, üçüncü girdi için $a_3 = 26$ seçenek vardır. Dördüncü girdi için $a_4 = 10$ tane seçenek vardır. Benzer şekilde $a_5 = a_6 = a_7 = 10$ olur. Bu nedenle, toplamda $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$ **175,760,000 adet olası standart plaka bulunmaktadır**.

[1] İngiliz alfabesinde 26 harf vardır.

İki çeşit liste sayma problemi vardır. Bir tarafta, aynı sembol ya da semboller listenin farklı girdileri için kullanılabilir. Örneğin, plakalar veya telefon numaraları tekrar eden sembollere sahip olabilir. C ve 4 sembollerinin birden fazla kullanıldığı $CCX - 4144$ dizisi son derece geçerli bir plakadır. Diğer tarafta, bazı listelerde sembollerin tekrar etmesi bir anlam ifade etmeyebilir ya da buna izin verilmez. Örneğin, 52 kartlık standart bir iskambil kağıdı destesinden 5 kart çekerek bunları sıraya dizdiğimizi düşünelim. Destedeki herhangi iki kart aynı olmadığı için listenin tekrar eden girdisi yoktur. İlk liste türünde *tekrarlamaya* izin verildiğini, ikinci türünde ise *tekrarlamaya izin verilmediğini* belirtiriz. (Tekrarlamaya izin verilmeyen listeleri çoğunlukla **tekrarsız liste** olarak adlandırırız.) Aşağıdaki örnek bu farklılığı göstermektedir.

Örnek 3.2. A, B, C, D, E, F, G sembollerinden bir liste oluşturduğumuzu düşünelim.

(a) Tekrar kullanıma izin verilmek koşuluyla uzunluğu 4 olan kaç liste vardır?

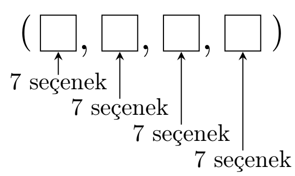
(b) Tekrar kullanıma izin **verilmemek** koşuluyla uzunluğu 4 olan kaç liste vardır?

(c) Tekrar kullanıma izin **verilmeyen** ve uzunluğu 4 olan listelerden kaç tanesi E harfini içerir?

(d) Tekrar kullanıma izin verilen ve uzunluğu 4 olan listelerden kaç tanesi E harfini içerir?

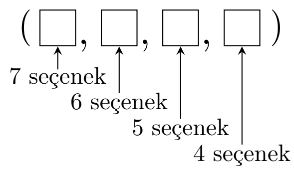
Çözümler:

(a) Listeyi, aşağıda gösterildiği gibi A, B, C, D, E, F ve G harflerinden yapılan seçimlerle doldurmak istediğimiz dört kutu biçiminde düşünelim.



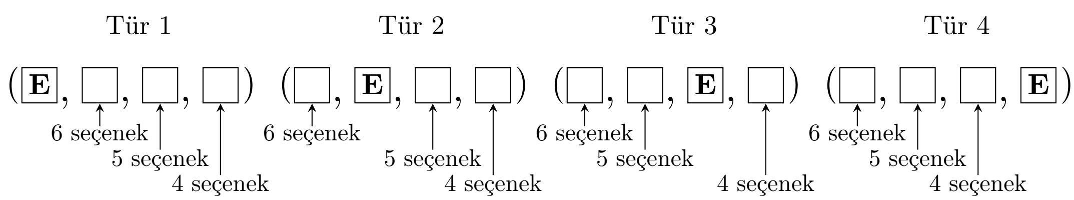
Her bir kutu için yapılabilecek yedi tane seçim vardır. Dolayısıyla bu şekilde yapılabilecek toplam liste sayısı $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = \mathbf{2401}$ adettir.

(b) Bu soru, sembollerin tekrar kullanıma izin verilmemesi dışında öncekinin aynısıdır. İlk kutu için yapılabilecek yedi seçim vardır ancak bu kutu doldurulduktan sonra içinde yer alan sembolü bir daha kullanamayız. Bu nedenle ikinci kutu için yapılabilecek altı seçenek vardır. İkinci kutu doldurulduktan sonra iki tane harfi kullanmış olacağımızdan üçüncü kutu için geriye beş seçenek kalır. Son olarak, üçüncü kutu da doldurulduğunda son kutu için sadece dört olası harf kalır.



Böylece, sorumuzun cevabı olarak, tekrarlamanın gerçekleşmediği $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{840}$ liste vardır.

(c) Sembollerin tekrar kullanımına izin verilmeyen ve listenin bir yerinde E harfini barındıran 4 uzunluklu listeleri saymamız istenmektedir. E harfi bu listede sadece bir defa kullanılabilir. Bu listeleri E harfinin birinci, ikinci, üçüncü veya dördüncü girdi olarak kullanıldığı dört kategoriye ayıralım. Bu dört kategori aşağıda gösterilmiştir.



İlk girdi olarak E harfinin kullanan birinci liste türünü göz önüne alalım. İkinci girdi için geriye altı seçenek (A, B, C, D, F veya G), üçüncü girdi için beş seçenek ve dördüncü girdi için ise dört seçenek vardır. Dolayısıyla ilk girdisi E olan $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ tane liste vardır. Yukarıdaki diyagramda gösterildiği gibi, ikinci, üçüncü veya dördüncü girdisi E olan $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$'şer tane liste vardır. Böylece, bu listelerden toplamda $120 + 120 + 120 + 120 = \mathbf{480}$ tane vardır.

(d) Sembollerin tekrar kullanımına izin veren ve E harfi içeren dört uzunluğundaki listelerin sayısını bulmamız gerekmektedir. Bunun için şu yolu izleyebiliriz: Bu örneğin (a) şıkkı gereğince tekrar kullanıma izin verilen $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 = 2401$ tane liste vardır. Açıkçası, bu sayı sorumuzun cevabı değildir çünkü bu listelerin bir çoğu E harfini içermez. Bu nedenle E harfini **içermeyen** liste sayısını 2401'den çıkarmamız gerekir. E harfi içermeyen bir liste hazırlarken her gidi için altı seçenek vardır (çünkü A, B, C, D, F veya G harflerinden birini seçebiliriz). Böylelikle E içermeyen $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ liste vardır. Bu nedenle, sorumuzun cevabı olarak, en az bir E içeren ve tekrarlamaya izin verilen $2401 - 1296 = \mathbf{1105}$ liste vardır.

Örnek 3.2 (d)'nin (c) şıkkına benzer şekilde çözülüp çözülmeyeceğini merak etmiş olabilirsiniz. Şimdi bunu o şekilde yapmaya çalışalım. En az bir E içeren ve (tekrar kullanıma izin verilen) 4 uzunluklu listeleri saymak istiyoruz. Aşağıdaki şema (c)'den uyarlanmıştır. Aradaki tek fark şudur: yedi harfin herbirini tekrar kullanabildiğimizden her kutu için yedi seçenek vardır.

Tür 1	Tür 2	Tür 3	Tür 4
$(\boxed{\mathbf{E}}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{})$	$(\boxed{}, \boxed{\mathbf{E}}, \boxed{}, \boxed{})$	$(\boxed{}, \boxed{}, \boxed{\mathbf{E}}, \boxed{})$	$(\boxed{}, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{\mathbf{E}})$
7 seçenek, 7 seçenek, 7 seçenek	7 seçenek, 7 seçenek, 7 seçenek	7 seçenek, 7 seçenek, 7 seçenek	7 seçenek, 7 seçenek, 7 seçenek

Bu, toplamda $7^3 + 7^3 + 7^3 + 7^3 = 1372$ tane liste verir ki bu sayı (d) şıkkında verdiğimiz 1105 (doğru) çözümünden önemli ölçüde büyüktür. Burada neyin yanlış gittiğini görmek zor değildir. Örneğin (E, E, A, B) listesi *hem* birinci türde *hem de* ikinci türde bir listedir ve bu yüzden *iki* defa sayılmıştır. Benzer şekilde (E, E, C, E) hem birinci hem ikinci hem de üçüncü türdedir yani üç defa sayılmıştır. Aslında, birçok kez sayılan benzer çok sayıda liste bulabilirsiniz.

Sayma problemlerini çözerken her zaman dikkatli olmalı ve bu tür çift sayma, üç defa sayma ya da daha kötüsünden daima kaçınmamız gerekir.

Alıştırmalar

Not: Bazı alıştımaları çözerken hesap makinası kullanmak yararlı olabilir. Hesap makinasının faydalı olduğu tek ünitedir budur. (Hesap makinası, diğer bölümlerdeki alıştırmaları daha da zorlaştırır.)

1. Tekrar kullanıma izin verilmek koşuluyla *T,E,O,R,İ* harflerinden yapılmış listeleri ele alalım.

   (a) Uzunluğu 4 olan kaç liste vardır?

   (b) Uzunluğu 4 olan ve T ile başlayan kaç liste vardır?

   (c) Uzunluğu 4 olan ve T ile başlamayan kaç liste vardır?

2. Havaalanları 3 harfli kodlarla temsil edilir. Örneğin Virginia Richmond havaalanı *RIC* koduna, Oregon Portland havaalanı ise *PDX* koduna sahiptir. Kaç tane olası 3 harfli kod vardır?

3. *A, B, C, D, E, F* sembollerinden, uzunluğu 3 olan liste yapılmak isteniyor.

   (a) Sembollerin tekrar kullanımına izin verilmek koşulu ile ...

   (b) Sembollerin tekrar kullanımına izin verilmemek koşulu ile ...

   (c) Sembollerin tekrar kullanımına izin verilmemek ve A harfini içermek koşulu ile ...

   (d) Sembollerin tekrar kullanımına izin verilmek ve A harfini içermek koşulu ile ...

   kaç tane liste yapılabilir?

4. Beş tane kart, 52 kartlık standart bir iskambil kağıdı desteden dağıtılarak sıraya diziliyor. Beş kartın hepsinin de aynı türden olduğu kaç sıralama vardır?

5. Beş tane kart, 52 kartlık standart bir desteden dağıtılarak sıraya diziliyor. Beş kartın hepsinin de aynı renkte (yani ya hepsi siyah ya da hepsi kırmızı) olduğu kaç sıralama yapılabilir?

6. Beş tane kart, 52 kartlık standart bir desteden dağıtılarak sıraya diziliyor. Beş karttan sadece birinin kız olduğu kaç sıralama yapılabilir?

7. Bu problem, 10011011 veya 00001010 örneklerinde olduğu gibi 8 basamaklı ikili dizeler (yani, 0'lar veya 1'lerden oluşan 8 basamaklı sayılar) hakkındır.

   (a) Bu şekilde kaç dize vardır?

   (b) Bu dizelerin kaç tanesi 0 ile biter?

   (c) Bu dizelerin kaçının ikinci ve dördüncü rakamları 1'dir?

   (d) Bu dizelerden kaçının ikinci **veya** dördüncü rakamları 1'dir?

8. Bu problem A, B, C, D, E harflerinden yapılacak listeler ile ilgilidir.

   (a) Uzunluğu 5 olan ve en az bir harfi tekrar eden kaç liste vardır?

   (b) Uzunluğu 6 olan ve en az bir harfi tekrar eden kaç liste vardır?

9. Bu problem $A, B, C, D, \ldots, Z$ harflerinden yapılan ve 4 harften oluşan kodlar ile ilgilidir.

   (a) Bu şekilde kaç tane kod yapılabilir?

   (b) Aynı harf yan yana gelmeyecek şekilde kaç kod vardır?

10. Bu problem $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ harflerinden yapılan listelerle ilgilidir.

    (a) Sembollerin tekrar kullanımına izin verilmeyen ve sesli bir harfle başlayan 5 uzunluklu kaç liste yapılabilir?

    (b) Sembollerin tekrar kullanımına izin verilmeyen ve sesli harfle başlayıp sesli bir harfle biten 5 uzunluklu kaç liste yapılabilir?

    (c) Sembollerin tekrar kullanımına izin verilmeyen ve sadece bir tane A harfi içeren 5 uzunluklu kaç liste yapılabilir?

11. Bu problem A, B, C, D, E, F, G, H harflerinden yapılan ve uzunluğu 6 olan listelerle ilgilidir. Sembollerin tekrar kullanımına izin verilmeyen ve ardışık sesli iki harf içeren kaç liste vardır?

12. Sembollerin tekrar kullanımına izin verilen ve P, R, O, F, S sembollerinden yapılan altı uzunluklu listelerini göz önüne alalım. (Örneğin, (P, R, O, O, F, S) bu listelerden biridir.) Buna göre S ile biten ve O sembolünü birden fazla içeren kaç liste yapılabilir?

3.2 Faktoriyel

Bölüm 3.1'deki örnekler üzerinde çalışırken, n tane sembolden her birinin tekrarsız olarak kullanılmasıyla oluşturulan n uzunluklu listelerin sıklıkla sayılması gerektiği dikkatinizi çekmiş olabilir. Aslında, sıklıkla karşılaşılan bu problemin üstesinden gelmek için *faktoriyel* kavramı tanımlanmıştır.

Aşağıdaki tablo bu kavramı açıklar. İlk sütun, (0 ile başlayarak) n tamsayısının ardışık değerlerini listeler. İkinci sütün, n tane sembol içeren $\{A, B, \dots\}$ kümesini belirtir. Üçüncü sütun, bu sembollerden oluşturulabilecek n uzunluğundaki bütün tekrarsız listeleri içerir. Son olarak, son sütun ise bu türden kaç tane liste bulunduğunu sayar. Dikkat edilirse $n = 0$ olduğunda, uzunluğu 0 olan ve 0 tane sembolden oluşturulabilen sadece bir tane liste vardır, o da () ile gösterilen boş listedir. Bu nedenle, bu satırın son sütununa 1 yazılmıştır.

n	Semboller	Bu semboller ile oluşturulabilecek tekrarsız listeler	$n!$
0	$\{\}$	$()$	1
1	$\{A\}$	(A)	1
2	$\{A, B\}$	$(A, B), (B, A)$	2
3	$\{A, B, C\}$	$(A, B, C), (A, C, B), (B, C, A), (B, A, C), (C, A, B), (C, B, A)$	6
4	$\{A, B, C, D\}$	$(A, B, C, D), (A, B, D, C), (A, C, B, D), (A, C, D, B), (A, D, B, C), (A, D, C, B)$ $(B, A, C, D), (B, A, D, C), (B, C, A, D), (B, C, D, A), (B, D, A, C), (B, D, C, A)$ $(C, A, B, D), (C, A, D, B), (C, B, A, D), (C, B, D, A), (C, D, A, B), (C, D, B, A)$ $(D, A, B, C), (D, A, C, B), (D, B, A, C), (D, B, C, A), (D, C, A, B), (D, C, B, A)$	24
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Son sütundaki sayı, $n > 0$ değerleri için çarpma ilkesi kullanılarak hesaplanabilir. Uzunluğu n olan ve n sembolden oluşturulabilecek tekrarsız liste sayısı $n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ olur. Örneğin, $n = 4$ için verilen satırın son sütunundaki sayı $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$'dür.

Buradaki $n-$yinci satırın son sütunundaki sayı n **faktoriyel** olarak adlandırılır. Bu sayı $n!$ ile gösterilir (ve "n faktöriyel" diye okunur). İşte tanımı:

Tanım 3.1. *Eğer n negatif olmayan bir sayı ise n **faktoriyel** ifadesi, uzunluğu n olan ve n tane sembolden oluşturulabilecek tekrarsız liste sayısı olarak tanımlanır. Bu sayı $n!$ ile gösterilir. Böylece $0! = 1$ ve $1! = 1$ olur. Eğer $n > 1$ ise $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ ile verilir.*

Yukarıdaki tanıma göre

$$\begin{aligned}
0! &= 1 \\
1! &= 1 \\
2! &= 2 \cdot 1 = 2 \\
3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \\
4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \\
5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 120 \\
6! &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720,
\end{aligned}$$

vb. olur.

Öğrenciler genellikle $0! = 0$ olduğunu zanneder ancak bu yanlıştır. Yukarıdaki tanım ve tablonun belirttiği üzere, bunun doğrusu $0! = 1$ şeklindedir. İşte $0!$ değerinin 1 olması gerektiğini görmenin başka bir yolu: Dikkat edilirse $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 5 \cdot 4!$ yazılabilir. Benzer şekilde $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 4 \cdot 3!$ yazılabilir. Bu akıl yürütmeyi genelleştirerek

$$n! = n \cdot (n-1)! \tag{3.1}$$

formülünü elde ederiz. Bu denklemde $n = 1$ yazıldığında $1! = 1 \cdot (1-1)!$ yani $1! = 1 \cdot 0!$ elde edilir. Eğer yanlışlıkla $0! = 0$ olduğunu düşünürsek buradan $1! = 0$ sonucunu elde ederiz ki bu yanlıştır.

Faktoriyellerle ilgili tartışmamıza bir örnek ile devam edelim.

Örnek 3.3. Bu problem $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ve 6 sembollerinden oluşturulan ve uzunluğu yedi olan listeler ile ilgilidir.

(a) Tekrar kullanıma izin verilmeyen kaç liste vardır?

(b) Tekrar kullanıma izin verilmeyen ve ilk üç girdisi tek olan kaç tane liste vardır?

(c) Tekrar kullanıma izin verilen ve en az bir sembolden iki tane içeren kaç liste vardır?

İlk önce birinci soruya cevap verelim. Dikkat edileceği üzere yedi tane sembol vardır. Buna göre listelerin sayısı $7! = \mathbf{5040}$ olur. Şimdi ikinci soruyu cevaplayalım. Dikkat edilirse $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesi üç tane tek sayı ve dört tane çift sayı içermektedir. Listelerin ilk üç girdisi tek sayılardan, son dört girdisi ise çift sayılardan oluşmalıdır. Çarpma ilkesini göre bu türdeki listelerin sayısı $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! \cdot 4! = \mathbf{144}$ olarak bulunur.

Üçüncü soruyu cevaplamak için sembollerin tekrar kullanımına izin verilen $7^7 = 823,543$ adet liste olduğuna dikkat ediniz. Bu tür listelerin tümü, girdilerinin hiçbiri tekrar etmeyen (örneğin, $(0, 6, 1, 2, 4, 3, 5)$) ve bazı girdileri tekrar eden (örneğin, $(6, 3, 6, 2, 0, 0, 0)$) listeleri içerir. Ancak biz, tekrarlanan en az bir rakam içeren listelerin sayısını hesaplamak istiyoruz. Bunun cevabını bulmak için uzunluğu yedi olan tekrarsız liste sayısını, uzunluğu yedi olan olası liste sayısından çıkarabiliriz. Bu nedenle cevap $7^7 - 7! = 823,543 - 5040 = \mathbf{818{,}503}$ olarak bulunur.

Bu bölümü, bu ünitenin birinci ve ikinci bölümlerindeki kavramları birleştiren bir formül ile kapatalım. Bölüm 3.1'in başlıca problemlerinden birini tekrar hatırlayalım: n sembolden, uzunluğu k olan kaç tane tekrarsız liste yapılabilir? Çarpma ilkesini uygulayarak cevabın neden

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

olduğunu biliyoruz. Sadeleştirme kuralı gereğince bu çarpımı

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

biçiminde yazabiliriz. Bunu şu şekilde özetleyebiliriz:

Gözlem 3.2. *Girdileri n tane sembol arasından tekrar etmeyecek şekilde seçilen ve uzunluğu k olan listelerin sayısı $\frac{n!}{(n-k)!}$ ile verilir.*

Örneğin $1,2,3,4,5,6,7,8$ rakamları kullanılarak elde edilen ve uzunluğu 5 olan tekrarsız listelerin sayısını bulmak istediğimizi düşünelim. Bunu iki şekilde yapabiliriz: Çarpma ilkesi gereğince cevap $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 6720$ olur; Gözlem 3.2'deki formül gereğince cevap $\frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = \frac{40{,}320}{6} = 6720$ olur.

Yeni formül çok da gerekli değildir. Ancak bu formül, eski bir kavramı güzel bir şekilde toparlar ve bir sonraki bölümde kolaylık sağlar.

Alıştırmalar

1. En küçük hangi n tamsayısı için $n!$ sayısının 10'dan fazla basamağı vardır?

2. Hangi n değerleri için $n!$ sayısının n tane ya da daha az rakamı vardır?

3. Bütün rakamları tek ve birbirinden farklı olan beş basamaklı kaç tane sayı vardır?

4. Sadece kalem ve kağıt kullanarak $\frac{100!}{95!}$ ifadesinin değerini bulunuz.

5. Sadece kalem ve kağıt kullanarak $\frac{120!}{118!}$ ifadesinin değerini bulunuz.

6. Sonunda iki tane 0 olan $10! = 3,628,800$ sayısı verilsin. Sadece kalem ve kağıt kullanarak $100!$ sayısının sonunda kaç tane 0 olduğunu belirleyiniz.

7. Sembollerin tekrar kullanımına izin verilmemek ve bütün tek sayılar çift sayılardan önce gelmek koşulu ile $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ rakamlarından kaç tane dokuz basamaklı sayı oluşturulabileceğini hesaplayınız. (Örneğin 137598264 böyle bir sayıdır fakat 123456789 değildir.)

8. Sembollerin tekrar kullanımına izin verilmeden tek sayılar ardışık olacak şekilde $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ rakamlarından yedi basamaklı kaç tane sayı oluşturulabileceğini hesaplayınız. (Örneğin 3571264, 2413576, 2467531 vb. olabilir ancak 7234615 **olamaz**.)

9. **Gama fonksiyonu** olarak adlandırlan çok ilginç bir $\Gamma : [0, 1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ olarak tanımlanır. Bu fonksiyonun çok dikkat çekici bir özelliği, eğer $x \in \mathbb{N}$ ise $\Gamma(x) = (x-1)!$ olmasıdır. Bu özelliği $x = 1, 2, 3, 4$ için doğrulayınız.

   Dikkat edilirse bu fonksiyon faktoriyel kavramını tamsayılar dışındaki sayılara genişletmenin bir yolunu verir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n) = (n-1)!$ olduğundan $n! = \Gamma(n+1)$ yazabiliriz. Ancak gama fonksiyonu sadece tamsayılarda değil, $[0, 1)$ aralığının her noktasında bir değer alır. Böylece her $n \in [0, 1)$ sayısına karşılık bir $n!$ değeri bulabiliriz. Bonus: $\pi!$ sayısını hesaplayınız.

10. Faktoriyelleri yaklaşık olarak hesaplamak için **Stirling formülü** adı verilen önemli bir fonksiyon vardır. Bu formül, $n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ olduğunu belirtir. Aslında n sonsuza giderken $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n}$ ifadesi 1'e yaklaşır. Bu anlamıyla $n!$ için bir yaklaşım sunar. Stirling formülünü kullanarak 5!, 10!, 20! ve 50! değerlerini yaklaşık olarak hesaplayınız.

3.3 Altküme Sayısı

Önceki iki bölümde, n tane girdi arasından k tanesini seçerek oluşturabileceğimiz listelerin sayısı ile ilgilendik. Şimdi bununla ilgili başka bir soru soralım: n elmanlı bir kümeden k tane eleman seçilerek kaç *altküme* oluşturulabilir?

Bu iki problem arasındaki farkı göstermek için $A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesini ele alalım. Öncelikle, A kümesinden iki girdi seçerek yapılabilecek tekrarsız listeleri düşünelim. Gözlem 3.2 uyarınca bu tür listelerden $\frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$ tane vardır. Bunlar aşağıda verilmiştir:

$$\begin{array}{cccccccccc}(a,b), & (a,c), & (a,d), & (a,e), & (b,c), & (b,d), & (b,e), & (c,d), & (c,e), & (d,e),\\ (b,a), & (c,a), & (d,a), & (e,a), & (c,b), & (d,b), & (e,b), & (d,c), & (e,c), & (e,d).\end{array}$$

Şimdi A kümesinin elemanları kullanılarak oluşturulabilecek iki elemanlı *altkümeleri* göz önüne alalım. Aşağıda verildiği gibi bu altkümelerden sadece on tane vardır.

$$\{a,b\}, \quad \{a,c\}, \quad \{a,d\}, \quad \{a,e\}, \quad \{b,c\}, \quad \{b,d\}, \quad \{b,e\}, \quad \{c,d\}, \quad \{c,e\}, \quad \{d,e\}.$$

Liste sayısının altküme sayısından daha fazla olmasının nedeni şudur: Bir listedeki girdilerin sırasını değiştirmek yeni bir liste üretir ancak bir kümedeki elemanların sırasını değiştirmek o kümeyi değiştirmez. Örneğin $a, b \in A$ elemanlarını kullanarak (a, b) ve (b, a) şeklinde iki liste yapabiliriz ancak sadece bir tane $\{a, b\}$ altkümesi oluşturabiliriz.

Bu bölümde listeleri saymakla değil, altkümeleri saymakla ilgileniyoruz. Yukarıda belirtildiği gibi, temel soru şudur: n elemanlı bir kümeden k eleman seçerek kaç tane altküme oluşturulabilir? Bu sorunun cevabına isim veren notasyonlarla başlayalım.

Tanım 3.2. *Eğer n ve k iki tamsayı ise n elemanlı bir kümeden k eleman seçilerek oluşturulabilecek altkümelerin sayısı $\binom{n}{k}$ ile gösterilir. Bu sembol "n'nin k'lısı" veya "n'nin k'lı kombinasyonu" diye okunur. (Bazı ders kitapları $\binom{n}{k}$ yerine $C(n, k)$ kullanır.)*

Bu tanıma bir örnek vermek için aşağıdaki tabloda, 4 tane elemanı olan $A = \{a, b, c, d\}$ kümesinin k kardinaliteli altkümelerinin tamamı listelenmiş ve $\binom{4}{k}$ sayısı çeşitli k değerleri için hesaplanmıştır. Tablonun en solundaki sütunda k değerleri verilmiştir. Her k tamsayısının sağında (eğer varsa) A kümesinin k elemanlı altkümeleri yer almaktadır. Örneğin, $k = 1$ olduğunda A kümesinin k elemanlı dört altkümesi vardır. Bunlar $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ ve $\{d\}$ kümeleridir. Bu nedenle $\binom{4}{1} = 4$ olur. Benzer şekilde, $k = 2$ olduğunda altı tane k elemanlı altküme vardır. Bu nedenle $\binom{4}{2} = 6$ olur.

n	$\{a, b, c, d\}$ kümesinin k elemanlı altkümeleri	$\binom{4}{k}$
-1		$\binom{4}{-1} = 0$
0	$\varnothing$	$\binom{4}{0} = 1$
1	$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$	$\binom{4}{1} = 4$
2	$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$	$\binom{4}{2} = 6$
3	$\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$	$\binom{4}{3} = 4$
4	$\{a, b, c, d\}$	$\binom{4}{4} = 1$
5		$\binom{4}{5} = 0$
6		$\binom{4}{6} = 0$

Dikkat edilirse $k = 0$ olduğunda A kümesinin kardinalitesi k olan sadece bir altkümesi vardır. O da $\varnothing$ yani boş kümedir. Bu nedenle $\binom{4}{0} = 1$ olur.

Eğer k negatif ya da $|A|$ ifadesinden büyük bir sayı ise A kümesinin k elemanlı hiç altkümesi yoktur. Bu durumlarda $\binom{4}{k} = 0$ olur. Genelleyecek olursak $k < 0$ veya $k > n$ için $\binom{n}{k} = 0$ olur. Özel olarak n negatif ise bu, $\binom{n}{k} = 0$ anlamına gelir.

Yukarıdaki tabloda yer alan altkümeleri yazarak $\binom{4}{k}$ değerlerini hesaplamak zor olmasa da bu metod, n ve k büyük olduğunda, $\binom{n}{k}$ sayısını hesaplamak için pratik bir yöntem değildir. Bu nedenle bir formüle ihtiyaç duyarız. Bunun için $\binom{5}{3}$ üzerinde dikkatli bir şekilde çalışalım. Burada ortaya çıkan örüntü, $\binom{n}{k}$ ifadesine bir formül bulmak için bize yol gösterecektir.

Başlayacak olursak, $\binom{5}{3}$ ifadesi a, b, c, d, e kümesinin 3 elemanlı altkümelerinin sayısıdır. Bu altkümeler aşağıdaki tabloda listelenmiştir. Görüleceği üzere $\binom{5}{3} = 10$ olur.

$\longleftarrow \binom{5}{3} \longrightarrow$

$\{a,b,c\}$	$\{a,b,d\}$	$\{a,b,e\}$	$\{a,c,d\}$	$\{a,c,e\}$	$\{a,d,e\}$	$\{b,c,d\}$	$\{b,c,e\}$	$\{b,d,e\}$	$\{c,d,e\}$

Bu tabloyu aşağıdaki şekilde genişlettiğimizde, formül ortaya çıkar. Yukarıda verilen 3 elemanlı on kümeden herhangi birini alarak birbirinden farklı 3! tane tekrarsız liste oluşturabiliriz. Örneğin, birinci sıradaki $\{a, b, c\}$ kümesini göz önüne alalım. Aşağıdaki tablonun ilk sütunu a, b, c harflerinden oluşan $3! = 6$ farklı listenin hesabını tutar. İkinci sütunu, $\{a, b, d\}$ harflerinden oluşan listelerin hesabını tutar ve bu şekilde devam eder.

$\longleftarrow \binom{5}{3} \longrightarrow$

$\updownarrow 3!$

abc	*abd*	*abe*	*acd*	*ace*	*ade*	*bcd*	*bce*	*bde*	*cde*
acb	*adb*	*aeb*	*adc*	*aec*	*aed*	*bdc*	*bec*	*bed*	*ced*
bac	*bad*	*bae*	*cad*	*cae*	*dae*	*cbd*	*cbe*	*dbe*	*dce*
bca	*bda*	*bea*	*cda*	*cea*	*dea*	*cdb*	*ceb*	*deb*	*dec*
cba	*dba*	*eba*	*dca*	*eca*	*eda*	*dcb*	*ecb*	*edb*	*edc*
cab	*dab*	*eab*	*dac*	*eac*	*ead*	*dbc*	*ebc*	*ebd*	*ecd*

Bu tablonun $\binom{5}{3}$ tane sütunu ve 3! tane de satırı vardır. Bu yüzden toplam olarak $3!\binom{5}{3}$ tane liste içerir. Yine dikkat edileceği üzere bu tablo $\{a, b, c, d, e\}$ sembollerinden oluşturulabilecek 3 uzunluklu tekrarsız listeden oluşur. Gözlem 3.2'den dolayı bu listelerden $\frac{5!}{(5-3)!}$ tane vardır. Böylece tablodaki toplam liste sayısı $3!\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!}$ ile verilir. Bu eşitliğin her iki tarafını 3! ile bölerek

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

elde ederiz. Bu ifadeyi hesaplayarak, değerinin 10 olduğunu görebilirsiniz.

Buradaki 5 ve 3 sayılarını özel yapan herhangi birşey yoktur. Yukarıdaki analizi $\binom{5}{3}$ yerine herhangi bir $\binom{n}{k}$ için de yapabilirdik. Bu durumda tablonun $\binom{n}{k}$ tane sütunu ve $k!$ tane de satırı olacağı için

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

olacaktır. Bunları aşağıdaki şekilde özetleyebiliriz:

Gözlem 3.3. *Eğer $n, k \in \mathbb{Z}$ ve $0 \leqslant k \leqslant n$ ise $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ olur. Aksi halde $\binom{n}{k} = 0$ olur.*

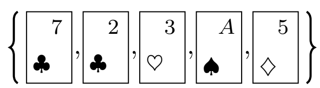
Şimdi bu öğrendiklerimizi bazı örnekler üzerinde uygulayalım.

Örnek 3.4. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinin dört elemanlı kaç altkümesi vardır.

Cevap: $\binom{9}{4} = \dfrac{9!}{4!(9-4)!} = \dfrac{9!}{4!5!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4!5!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{24} = \mathbf{126}$.

Örnek 3.5. Standart 52 kartlık bir iskambil kağıdı destesinden 5 kartlık bir el dağıtılmaktadır. Kaç farklı 5 kartlı el mümkündür?

Bunu cevaplamak için 52 kartlık desteyi D kümesi olarak düşünelim. Buna göre 5 kartlı bir el, D kümesinin sadece 5 elemanlı bir altkümesidir. Örneğin, bu desteden dağıtılabilecek 5 kartlı birçok farklı elden bir tanesi aşağıda verilmiştir.



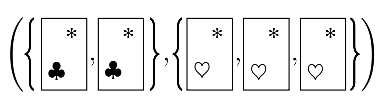
Dağıtılabilecek toplam el sayısı, D kümesinin 5 elemanlı altkümelerinin sayısına eşittir. Bir başka deyişle bu sayı

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5! \cdot 47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{5! \cdot 47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5! \cdot 47!} = 2,598,960$$

ile verilir. Böylece, sorumuza cevap olarak, 52 kartlık bir desteden dağıtılabilecek beş kartlı $2,598,960$ tane farklı el vardır.

Örnek 3.6. Bu problem, 52 kartlık bir desteden dağıtılabilecek 5 kartlı ellerle ilgilidir. Kartlardan iki tanesi sinek ve üç tanesi de kupa olacak şekilde 5 kartlı kaç el vardır?

Çözüm: Bu elleri, uzunluğu iki olan aşağıdaki formda bir liste olarak düşünelim.



Bu listenin ilk girdisi, 13 elemanlı sinek kartlarının 2 elemanlı bir altkümesi; ikinci girdisi ise 13 elemanlı kupa kartlarının 3 elemanlı bir altkümesidir. İlk girdi için $\binom{13}{2}$ seçenek, ikinci girdi için ise $\binom{13}{3}$ tane seçenek vardır. Çarpma ilkesi gereğince bu listelerden $\binom{13}{2}\binom{13}{3} = \frac{13!}{2!11!}\frac{13!}{3!10!} = 22,308$ tane vardır. Cevap: **İki sinek ve üç kupa içeren $\mathbf{22,308}$ tane 5 kartlı el vardır.**

Örnek 3.7. Şu şekilde işleyen bir şans oyunu düşünelim. Bir torbada $1, 2, 3, 4, \ldots, 36$ olarak numaralandırılmış 36 tane top olsun. Bunlardan altısı rastgele çekilsin. İçerisinde altı tane boş kutu olan

$\boxed{\square\square\square\square\square\square}$ şeklindeki bir kuponun fiyatı 1 dolar olmak üzere bu boş kutular 1 ile 36 arasındaki altı tane farklı sayı ile doldurulsun. Çekilen sayıları sıralama önemli olmaksızın tutturan kişinin $1,000,000\,\$$ kazandığını varsayalım. Buna göre kazanma şansınız nedir?

Çözüm: Kuponu doldururken 36 sayı içeren bir kümeden 6 tane sayı seçeriz. Bu sayıların, farklı şekilde yazılabilecek $\binom{36}{6} = \frac{36!}{6!(36-6)!} = 1,947,792$ tane kombinasyonu vardır ve bunlardan sadece biri kazanır. Buna göre **kazanma şansınız $\mathbf{1,947,792}$'de birdir**.

Alıştırmalar

1. Bir A kümesinin 37 tane elemanı olsun. A kümesinin 10 elemanlı kaç altkümesi vardır? Kaç tane altküme 30 elemana sahiptir? Kaç tanesinin 0 tane elemanı vardır?

2. Bir A kümesi için $|A| = 100$ olsun. A kümesinin 5 elemanlı kaç altkümesi vardır? Kaç altkümesinin 10 elemanı vardır? Kaç tanesinin 99 elemanı vardır?

3. Bir X kümesi 56 tane 3 elemanlı altkümeye sahiptir. O halde X kümesinin kardinalitesi nedir?

4. Bir B kümesi $|\{X : X \in \mathcal{P}(B), |X| = 6\}| = 28$ özelliğine sahip olsun. Buna göre $|B|$ kaçtır?

5. Basamak sayısı 16 olan ikili dizelerden kaçı yedi tane 1 içerir? (Örneğin, 0111000011110000 ve 0011001100110010 vb. bu türdeki iki dizedir.)

6. $|\{X \in \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}) : |X| = 4\}| =$

7. $|\{X \in \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}) : |X| < 4\}| =$

8. Bu problem $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ sembollerinden yapılan listelerle ilgilidir.

   (a) Tekrar kullanma izin verilmemek ve alfabetik olarak sıralanmak koşulu ile uzunluğu 5 olan kaç liste yapılabilir. (Örnek: $BDEFI$ veya $ABCGH$ olabilir fakat $BACGH$ olamaz.)

   (b) Tekrar kullanma izin verilmemek ve alfabetik sırada **olmamak** olarak sıralanmak koşulu ile uzunluğu 5 olan kaç liste yapılabilir.

9. Bu problem, tekrar kullanıma izin verilmemek koşuluyla A, B, C, D, E, F sembollerinden yapılan ve uzunluğu 6 olan listeler hakkındadır. Bu türdeki listelerin kaç tanesinde D harfi A harfinden önce gelir?

10. Bir bölüm, 5 erkek ve 7 kadından oluşmaktadır. Bu bölümden 3 erkek ve 2 kadından oluşan bir komite seçilecektir. Bu seçim kaç farklı şekilde yapılabilir?

11. On basamaklı tamsayılardan kaç tanesi hiç 0 içermez fakat üç tane 6 içerir?

12. Yirmi bir kişi, Kırmızı Takım ve Mavi Takım olmak üzere ikiye ayrılacaktır. Kırmızı takımda 10 kişi ve Mavi takımda ise 11 kişi olacaktır. Bu iş kaç farklı şekilde yapılabilir?

13. Kabul edelim ki n ve k tamsayıları $0 \leqslant k \leqslant n$ koşulunu sağlasın. Buna göre $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ formülünü kullanarak $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ olduğunu gösteriniz.

14. Kabul edelim ki $n, k \in \mathbb{Z}$ ve $0 \leqslant k \leqslant n$ olsun. Yalnızca Tanım 3.2'yi kullanıp (Gözlem 3.3'ü kullanmadan) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ olduğunu gösteriniz.

3.4 Pascal Üçgeni ve Binom Teoremi

$\binom{n}{k}$ sayıları arasında zarif ve anlamlı örüntüler vardır. Bu bölümde, özellikle bir denkleme dayanan örüntüleri inceleyeceğiz: $1 \leqslant k \leqslant n$ olmak üzere herhangi n ve k tamsayıları için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \tag{3.2}$$

Bunun neden doğru olduğunu görmek için $\binom{n+1}{k}$ ifadesinin, $n+1$ elemanlı bir kümenin k elemanlı altkümelerinin sayısına eşit olduğunu hatırlayınız. Şimdi, $A = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$ kümesinin $n+1$ tane elemanı vardır. Bu yüzden $\binom{n+1}{k}$ ifadesi, A kümesinin k elemanlı altkümelerinin sayısına eşittir. Bu altkümeler iki kategoriye ayrılabilir: 0 elemanını içerenler ve 0 elemanını içermeyenler. Aslında, 0 içeren k elemanlı bir altküme oluşturmak için $\{0\}$ ile başlar ve daha sonra bu kümeye $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ kümesinden $k-1$ tane sayı ekleyebiliriz. Bu seçimi yapmanın $\binom{n}{k-1}$ tane yolu vardır. Bu nedenle A'nın k elemanlı altkümelerinden $\binom{n}{k-1}$ tanesi 0 içerir. A'nın 0 içermeyen k elemanlı altkümelerine gelince, bunlardan $\binom{n}{k}$ tane vardır çünkü bunları n elemanlı $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ kümesinden k tane eleman seçerek oluştururuz. Bütün bunların ışığında Eşitlik (3.2); A'nın k elemanlı altkümelerinin sayısının, 0 içermeyen k elemanlı altkümelerinin sayısı ile 0 içeren k elemanlı altkümelerinin sayısının toplamına eşit olduğunu açıkça ortaya koyar.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7} \\
\iddots & & & & & & & \vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
\iddots & & & & & & & \vdots & & & & & & & \ddots
\end{array}
$$

Şekil 3.2: Pascal üçgeni

Eşitlik (3.2)'nin neden doğru olduğunu görmüş olduk. Şimdi, $\binom{n}{k}$ sayıları arasındaki birçok ilişkiyi ortaya çıkarmak için onları üçgensel bir şekilde sıralayalım. Şekil 3.2'nin sol tarafı, $\binom{n}{k}$ sayılarını bir piramit üzerinde listeler. Bu piramitin en tepesinde $\binom{0}{0}$ sayısı bulunur. Bu sayı, $k = 0$ ve $k = 1$ değerlerine karşılık gelen $\binom{1}{k}$ sayılarının hemen üzerindedir. Onların altında $k = 0, 1, 2$ değerlerine karşılık gelen $\binom{2}{k}$ sayıları bulunur. Genel olarak $\binom{n}{k}$ sayılarını listeleyen her satır, $\binom{n+1}{k}$ sayılarını listeleyen satırın hemen üstündedir.

Herhangi bir $0 < k < n$ sayısına karşılık gelen piramitteki $\binom{n+1}{k}$ sayısı, bir önceki satırdaki $\binom{n}{k}$ ve $\binom{n}{k-1}$ sayılarının hemen orta alt kısmında bulunur. Eşitlik 3.2, $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ olduğunu söyler. Böylece piramitteki (1 hariç) herhangi bir sayı, kendisinin hemen üzerindeki iki sayının toplamıdır.

Bu örüntü, $\binom{n}{k}$ yerine özel olarak onun değerinin yazıldığı Şekil 3.2'nin sağ tarafında daha belirgindir. Örneğin 21 tamsayısı, üst tarafındaki 6 ve 15 sayılarının toplamıdır. Benzer şekilde 5 tamsayısı, üstündeki 1 ve 4 sayılarının toplamıdır.

Şekil 3.2'nin sağ tarafındaki üçgensel dizi **Pascal üçgeni** olarak adlandırılır. (Adını, bir çok özelliklerini ortaya çıkaran Fransız matematikçi ve filozof Blaise Pascal'dan, 1623–1662, almıştır.) Pascal üçgeninin (en tepedeki sıfırıncı satır ile başlayan) ilk sekiz satırını yazmış olsak da bu üçgen sonsuza dek uzatılabilir. Alt tarafa bir satır ekleyebiliriz. Bunun için o satırın başına ve sonuna 1 yerleştirip geri kalan sayıları, hemen onların üst kısmındaki sayıları toplayarak bulabiliriz. Bunu yaparsak aşağıdaki satırı elde ederiz:

$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

Bu satır, $0 \leqslant k \leqslant 8$ olmak üzere $\binom{8}{k}$ sayılarından oluşur ve biz bunları $\binom{8}{k} = \frac{8!}{k!(8-k)!}$ formülünü kullanmadan hesapladık! Herhangi bir $\binom{n}{k}$ sayısı bu şekilde hesaplanabilir.

En tepedeki (sadece 1 içeren) satır, *sıfırıncı satır* olarak adlandırılır. Onu, hemen altındaki birinci satır, ardından ikinci satır, sonrasında üçüncü satır vb. izler. Bu nedenle $n-$yinci satır, $0 \leqslant k \leqslant n$ olmak üzere, $\binom{n}{k}$ sayılarından oluşur.

Dikkat edileceği üzere $n-$yinci satırdaki sayılar, $(x + y)^n$ ifadesinin açılımındaki katsayılarının listesidir. Örneğin $(x + y)^2 = \mathbf{1}x^2 + \mathbf{2}xy + \mathbf{1}y^2$ açılımındaki katsayılar, ikinci satırda listelenen 1 2 1 sayılarıdır. Benzer şekilde $(x + y)^3 = \mathbf{1}x^3 + \mathbf{3}x^2y + \mathbf{3}xy^2 + \mathbf{1}y^3$ açılımındaki katsayılar üçüncü satırdaki 1 3 3 1 sayılarıdır. Şekil 3.3'ün sol tarafında, $1 \leqslant n \leqslant 5$ değerlerine karşılık gelen Pascal üçgeni ve sağ tarafında ise $(x + y)^n$ açılımları verilmiştir. Her durumda (en azından kontrol etmeyi düşünürseniz) $n-$yinci satırdaki sayılar ile $(x + y)^n$ açılımındaki katsayılar örtüşür.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\iddots & & & & & \vdots & & & & & \ddots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \\
1x + 1y \\
1x^2 + 2xy + 1y^2 \\
1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3 \\
1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4x^3 + 1y^4 \\
1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5 \\
\iddots \qquad \vdots \qquad \ddots
\end{array}
$$

Şekil 3.3: Pascal üçgenindeki $n-$yinci satır, $(x+y)^n$ ifadesinin açılımındaki katsayıları listeler

Aslında bu gözlem her n için doğrudur. Bu sonuç Binom teoremi olarak bilinir ve bundan burada bahsetmeye değer. Bu teorem, $x+y$ toplamının negatif olmayan $n-$yinci bir tamsayı kuvvetinin nasıl alınacağını açıklar.

Teorem 3.1 (Binom Teoremi)**.** *Eğer n negatif olmayan bir tamsayı ise*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

olur.

Şimdilik Binom teoremini, ispatı olmadan kabul edelim. (Ünite 10'daki alıştırmaların birinde bunu ispatlamanız istenecektir.) Zaman zaman bu teorem yararlı olabilir. Örneğin, $(x+y)^7$ ifadesini açmak gerektiğinide bunu kullanabilirisiniz. Bunun için Şekil 3.2'deki Pascal üçgeninin yedinci satırına bakıp Binom teoremini uygulayarak

$$(x+y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7$$

elde ederiz. Başka bir örnek olarak,

$$
\begin{aligned}
(2a-b)^4 &= ((2a)+(-b))^4 \\
&= (2a)^4 + 4(2a)^3(-b) + 6(2a)^2(-b)^2 + 4(2a)(-b)^3 + (-b)^4 \\
&= 16a^4 - 32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4
\end{aligned}
$$

olduğu görülebilir.

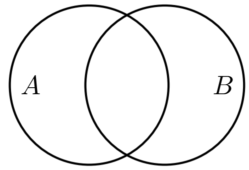
Alıştırmalar

1. Pascal üçgeninin 11. satırını yazınız.
2. Binom teoremini kullanarak $(x+y)^{13}$ ifadesindeki x^8y^5 teriminin katsayısını bulunuz.
3. Binom teoremini kullanarak $(x+2)^{13}$ ifadesindeki x^8 teriminin katsayısını bulunuz.
4. Binom teoremini kullanarak $(3x-2y)^{13}$ ifadesindeki x^6y^3 teriminin katsayısını bulunuz.
5. Binom teoremini kullanarak $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ olduğunu gösteriniz.
6. Tanım 3.2 (sayfa 92) ve Gözlem 1.3'ü (sayfa 27) kullanarak $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ olduğunu gösteriniz.
7. Binom teoremini kullanarak $\sum_{k=0}^{n}3^k\binom{n}{k}=4^n$ olduğunu gösteriniz.
8. Gözlem 3.2'yi (sayfa 90) kullanarak Eşitlik 3.2'yi (sayfa 96) elde ediniz.
9. Binom teoremini kullanarak $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\binom{n}{4}-\cdots+(-1^n)\binom{n}{n}=0$ olduğunu gösteriniz.
10. Eğer k ve n tamsayıları $0\leqslant k\leqslant n$ şartını sağlıyorsa $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ formülünün doğru olduğunu gösteriniz.
11. Binom teoremini kullanarak $9^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}10^{n-k}$ olduğunu gösteriniz.
12. $\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$ olduğunu gösteriniz.
13. $\binom{n}{3}=\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\cdots+\binom{n-1}{2}$ olduğunu gösteriniz.
14. Pascal üçgeninin ilk beş satırı, 11 sayısının kuvvetlerinin rakamlarında ortaya çıkar: $11^0=1$, $11^1=11$, $11^2=121$, $11^3=1331$ ve $11^4=14641$. Bunun sebebi nedir? Bu örüntü, 11^5 ile neden devam etmez?

3.5 İçindelik - Dışındalık

Birçok sayma problemi, sonlu iki kümenin birleşimi olan $A\cup B$ kümesinin kardinalitesini hesaplamayı içerir. Şimdi bu tür problemleri inceleyelim.

Öncelikle $|A\cup B|$ için bir formül bulalım. İlk bakışta $|A\cup B|$ ifadesinin $|A|+|B|$ değerine eşit olduğunu söylemek cazip gelebilir ancak bu pek de doğru değildir. Eğer ilk önce A kümesinin elemanlarını, daha sonra B kümesinin elemanlarını sayar ve bu ikisini toplarsak $|A|+|B|$ ifadesini buluruz. Ancak A ve B kümelerinin ortak elemanları var ise $A\cap B$ kümesindeki her eleman *iki kez* sayılmıştır.



O halde $|A|+|B|$ sayısı $|A \cup B|$ sayısından $|A \cap B|$ kadar fazladır. Böylece $|A \cup B| = |A|+|B|-|A \cap B|$ olur. Bu eşitlik kullanışlı olabilir:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{3.3}$$

Genellikle A, B ve $A \cap B$ kümelerinin hepsi $A \cup B$ kümesinden küçüktür. Bu nedenle Eştilik (3.3), $|A \cup B|$ değerini belirleme problemini daha basit olan üç sayma problemine indirgeme potansiyeline sahiptir. Bu formüle bazen *içindelik-dışındalık* formülü denir çünkü $A \cap B$ kümesinin elemanları, $|A|+|B|$ tarafından (iki defa) içerilir ve sonra $|A \cap B|$ çıkartılarak dışarıda bırakılır. Eğer $A \cap B = \varnothing$ ise $|A \cup B| = |A|+|B|$ olur. Buna karşılık, eğer $|A \cap B| = |A|+|B|$ ise $A \cap B = \varnothing$ olmak zorundadır.

Örnek 3.8. Üç kartlı bir el, 52 kartlık standart bir iskambil kağıdı destesinden dağıtılsın. Üç karttan üçünün de kırmızı ya da üçününde yüze[2] sahip olduğu kaç el vardır?

Çözüm. Kartların hepsinin de kırmızı (yani $\heartsuit$ veya $\diamondsuit$) olduğu bütün üçlü ellerin kümesi A olsun. Benzer şekilde hepsi yüze sahip (yani herhangi bir takımdaki J, K veya Q) kartlarından oluşan bütün üçlü ellerin kümesi B olsun. Bu kümeler aşağıda gösterilmiştir.

$$A = \left\{ \left\{ \boxed{5\,\heartsuit}, \boxed{K\,\diamondsuit}, \boxed{2\,\heartsuit} \right\}, \left\{ \boxed{K\,\heartsuit}, \boxed{J\,\heartsuit}, \boxed{Q\,\heartsuit} \right\}, \left\{ \boxed{A\,\diamondsuit}, \boxed{6\,\diamondsuit}, \boxed{6\,\heartsuit} \right\}, \ldots \right\} \quad \text{(Kırmızı kartlar)}$$

$$B = \left\{ \left\{ \boxed{K\,\spadesuit}, \boxed{K\,\diamondsuit}, \boxed{J\,\clubsuit} \right\}, \left\{ \boxed{K\,\heartsuit}, \boxed{J\,\heartsuit}, \boxed{Q\,\heartsuit} \right\}, \left\{ \boxed{Q\,\diamondsuit}, \boxed{Q\,\clubsuit}, \boxed{Q\,\heartsuit} \right\}, \ldots \right\} \quad \text{(Yüze sahip kartlar)}$$

Hepsi kırmızı veya hepsi yüze sahip olan üç kartlı ellerin sayısını bulmak istiyoruz. Bu sayı $|A \cup B|$ ile verilir. Eşitlik (3.3) uyarınca $|A \cup B| = |A|+|B|-|A \cap B|$ olur. Şimdi $|A|$, $|B|$ ve $|A \cap B|$ sayılarını ayrı ayrı inceleyelim. A kümesindeki herhangi bir el, destedeki 26 kırmızı kart arasından üçü seçilerek oluşturulur. Bu nedenle $|A| = \binom{26}{3}$ olur. Benzer şekilde B kümesindeki herhangi bir el, destedeki yüze sahip 12 karttan üçü seçilerek oluşturulur. Bu yüzden $|B| = \binom{12}{3}$ olur. Şimdi $A \cap B$ kümesini ele alalım. Bu küme, hem kırmızı olup hem de yüze sahip bütün üç kartlı elleri içerir.

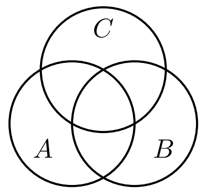
$$A \cap B = \left\{ \left\{ \boxed{K\,\heartsuit}, \boxed{K\,\diamondsuit}, \boxed{J\,\heartsuit} \right\}, \left\{ \boxed{K\,\heartsuit}, \boxed{J\,\heartsuit}, \boxed{Q\,\heartsuit} \right\}, \left\{ \boxed{Q\,\diamondsuit}, \boxed{J\,\diamondsuit}, \boxed{Q\,\heartsuit} \right\}, \ldots \right\} \quad \text{(Kırmızı ve yüze sahip kartlar)}$$

[2] Vale, kız veya papaz.

Destede, yüze sahip sadece 6 tane kart vardır. Böylece $|A \cap B| = \binom{6}{3}$ olur.

Şimdi soruyu cevaplayabiliriz. Hepsi kırmızı veya hepsi yüze sahip olan üç kartlı ellerin sayısı $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \binom{26}{3} + \binom{12}{3} - \binom{6}{3} = 2600 + 220 - 20 = \mathbf{2800}$ ile verilir.

Eşitlik (3.3)'ün üç tane küme içeren bir versiyonu vardır. Aşağıdaki Venn diyagramı ile temsil edilen A, B ve C kümelerini ele alalım.



Eşitlik (3.3) için kullanılan akıl yürütme ile kendinizi

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \tag{3.4}$$

olduğuna ikna edebilirsiniz. Şimdilik bunu göz ardı etmenin büyük bir zarar yoktur ancak bu tür şeyler ilginizi çekiyorsa kombinatorik teorisi dersi alabilirsiniz. (Hocanızdan bilgi alabilirsiniz!)

Daha önce belirttiğimiz üzere, eğer $A \cap B = \varnothing$ ise Eştilik (3.3) $|A \cup B| = |A| + |B|$ halini alır. Ayrıca Eşitlik (3.4)'de $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$ ve $B \cap C = \varnothing$ ise $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$ formülünü elde ederiz. Genelleyecek olursak, ortak hiçbir elemanı bulunmayan n tane küme için aşağıdaki formülü verebiliriz. Bu formül bazen **toplama ilkesi** olarak adlandırılır.

Gözlem 3.4 (Toplama ilkesi). *Eğer $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümeleri her $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \varnothing$ şartını sağlıyor ise $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$ olur.*

Örnek 3.9. Tek sayıda 1 rakamı içeren 7 basamaklı kaç ikili dize (0010101, 1101011 vb.) vardır?

Çözüm. A kümesi, tek sayıda 1 rakamı içeren ve 7 basamağa sahip bütün ikili dizelerin kümesi olsun. Buna göre sorunun cevabı $|A|$ olur. $|A|$ sayısını hesaplamak için A kümesini daha küçük parçalara bölelim. Dikkat edilirse A kümesindeki dizeler bir, üç, beş ya da yedi tane 1 rakamı içerir. Şimdi, A_1 kümesi sadece bir tane 1 rakamı içeren 7 basamağa sahip ikili dizeler kümesi olsun. A_3 kümesi, üç tane 1 içeren 7 basamaklı ikili dizeler kümesi olsun. Benzer şekilde A_5 kümesi, beş tane 1 içeren 7 basamaklı ikili dizeler kümesi ve A_7 ise yedi tane 1 içeren 7 basamaklı ikili dizeler kümesi olsun. Böylelikle $A = A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7$ olur. Dikkat edilirse herhangi iki A_i kümesinin kesişimi boş kümedir. Buna göre Gözlem 3.4 gereğince $|A| = |A_1| + |A_3| + |A_5| + |A_7|$ olur.

Şimdi soru, bu toplamdaki terimlerin değerlerini bulmaya indirgenmiştir. Örneğin A_3 yani üç tane 1 içeren 7 basamaklı ikili dizeler kümesini ele alalım. Böyle bir dize, 1 rakamı için yedi konumdan üçünü seçerek ve diğerlerine 0 yazarak oluşturulabilir. Bu nedenle $|A_3| = \binom{7}{3}$ olur. Benzer şekilde $|A_1| = \binom{7}{1}$, $|A_5| = \binom{7}{5}$ ve $|A_7| = \binom{7}{7}$ olduğu görülebilir. Nihayetinde, sorumuzun cevabı $|A| = |A_1| + |A_3| + |A_5| + |A_7| = \binom{7}{1} + \binom{7}{3} + \binom{7}{5} + \binom{7}{7} = 7 + 35 + 21 + 1 = 64$ olur. **Tek sayıda 1 rakamı içeren 7 basamaklı ikili dizelerden 64 tane vardır**.

Toplama ilkesini, başlı başına bir sonuç olduğunu düşünmeden kullanıyor olmuş olabilirsiniz. Örneğin, listeleri dört türe ayırıp herbir türdeki liste sayısını hesapladığımız Örnek 3.2(c)'de bu ilkeyi kullandık.

Alıştırmalar

1. Belirli bir üniversitenin matematik veya tarih bölümlerinde (veya her ikisinde) okuyan 523 öğrenci vardır. Matematik bölümünde okuyan 100 öğrenci, hem matematik hem de tarih bölümlerinde okuyan 33 öğrenci olduğuna göre tarih bölümünde okuyan öğrenci sayısı kaçtır?

2. Hiçbir rakamı tekrar etmeyen veya rakamlarının hepsi tek sayı olup tekrar kullanıma izin verilen 4 basamaklı kaç pozitif tamsayı vardır?

3. Çift olan veya 0 rakamını içermeyen 4 basamaklı kaç pozitif tamsayı vardır?

4. Bu problem tekrar kullanıma izin verilmek koşulu ile T, H, E, O, R, Y harflerinden oluşan listelerle ilgilidir.

   (a) T ile başlamayan veya Y ile bitmeyen 4 uzunluklu kaç liste vardır?

   (b) T, H, E harflerinin ard arda geldiği 4 uzunluklu kaç liste vardır?

   (c) T, H, E harflerinin ard arda geldiği 5 uzunluklu kaç liste vardır?

5. 1 ile başlayan veya 1 ile biten veya dört tane 1 içeren yedi basamaklı kaç ikili dize vardır?

6. Eğer $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$ ise $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$ ifadesi doğru mudur? Açıklayınız.

7. Bu problem, 52 kartlık standart bir desteden dağıtılan dört kartlı ellerle ilgilidir. Dört kartın hepsinin aynı türde olduğu veya dört kartın hepsinin de kırmızı olduğu kaç el vardır?

8. Bu problem, 52 kartlık standart bir desteden dağıtılan dört kartlı ellerle ilgilidir. Dört karttan her birinin farklı türde olduğu veya dört kartın hepsinin de kırmızı olduğu kaç el vardır?

9. L, I, S, T, E, D harfleri kullanılarak şu kurala göre 4 harfli bir liste yapılmak isteniyor: Tekrar kullanıma izin verilir; listedeki ilk iki harf seslidir veya liste D ile biter. Bu türde olası kaç liste vardır?

10. Aynı renk ve tür kartlardan oluşan 5 kartlı bir poker eline *flush* denir. Kaç farklı flush vardır?

Kısım II

Koşullu Önermeler Nasıl İspatlanır

Bölüm 4

Doğrudan İspat

Artık bazı teoremleri ispatlama vakti geldi. Bu işi yapmak için çeşitli yollar vardır. Şimdi bu yollar arasındaki en basit yöntem olan ve *doğrudan ispat yöntemi* olarak adlandırılan metodu inceleyelim. Bu işe başlarken şu üç anahtar terimin anlamlarını akılda tutmak önemlidir: *Teorem, ispat* ve *tanım*.

Teorem, doğru olan ve bu kanıtlanılabilecek (ve kanıtlanmış) olan matematiksel bir önermedir. Hiç bir şüpheye yer vermeksizin, bir teoreminin kesinlikle doğru olduğunu gösteren yazılı ifadeye **ispat** denir. Bir ispat anlaşılabilir olmalı ve yeterli altyapı bilgisine sahip herkesi ikna edebilmelidir. Bu altyapı bilgisi, teorem ve ispatının içerdiği matematiksel kelime, ifade ve sembollerin anlamlarını kavrayabilmektir. İspatta kullanılan her bir kelime, hem ispatı yazan hem de ispatı okuyanlar için aynı anlama gelmelidir; aksi halde tolere edilemeyecek bir belirsizlik ortaya çıkar. **Tanım**, matematiksel bir kelime veya ibarenin anlamını tam ve net olarak açıklayan yazılı ifadedir. Önümüzdeki iki bölüm boyunca *teorem* ve *tanım* kavramları üzerinde duracağız. Daha sonra ispatları yazmaya hazır olacağız.

4.1 Teoremler

Teorem, doğruluğu ispatlanmış olan bir önermedir. Matematik eğitiminiz boyunca birçok teoremle karşılaştınız. Aşağıda, matematik lisans kitaplarından alınan bazı teoremler verilmiştir. İspatını okumamış olsanız bile bu teoremler size tanıdık gelecektir.

Teorem: Bir f fonksiyonu bir I açık aralığında diferansiyellenebilir ve $c \in I$ olsun. Eğer f fonksiyonunun I üzerindeki maksimum veya minimum değeri $f(c)$ ise $f'(c) = 0$ olur.

Teorem: Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsak ise $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ olur.

Teorem: Kabul edelim ki f bir $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli olsun. Bu durumda f aynı aralık üzerinde integrallenebilirdir.

Teorem: Mutlak yakınsak olan her seri yakınsaktır.

Gözlemleneceği üzere bu teoremlerin her biri ya *"Eğer P ise Q."* koşullu formundadır ya da bu forma dönüştürülebilir. İlk teorem bir takım notasyonel kurgu yapan *"Bir f fonksiyonu bir I açık aralığında diferansiyellenebilir ve $c \in I$ olsun."* cümlesi ile başlar ve koşullu önerme bundan sonra gelir. Üçüncü teorem ise *"Kabul edelim ki P olsun. Bu durumda Q vardır."* formundadır ve bu ifade *"Eğer P ise Q."* ile aynı anlama gelir. Son teorem ise *"Eğer bir seri mutlak yakınsak ise yakınsaktır."* şeklinde yeniden yazılabilir.

"Eğer P ise Q." formundaki bir teorem P önermesinden yeni bilgi üreten bir araç olarak düşünülebilir. Buna göre P önermesinin doğru olduğu herhangi bir durumla ilgilendiğimizde, teorem bize Q önermesinin de doğru olduğunu garanti eder. Bilginin bu şekilde türetilmesi yararlı olduğu için *"Eğer P ise Q."* formundaki teoremler oldukça yaygındır.

Fakat *her* teorem koşullu bir önerme formunda olmak zorunda değildir. Bazıları çift koşullu olan $P \Leftrightarrow Q$ formundadır fakat bildiğimiz üzere bunlar iki tane koşullu önerme şeklinde ifade edilebilir. Diğer teoremler ise sadece belirli konular hakkındaki doğruları belirtir. Bunun bir örneği analiz derslerinden bildiğiniz aşağıdaki teoremdir.

Teorem: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$ *serisi ıraksaktır.*

Bu teoremi koşullu bir önerme şeklinde ifade etmek zordur (edilse de garip olur). Yine de teoremlerin çoğu koşullu önerme formundadır ve bundan dolayı bu kitabın büyük bir kısmı bu türdeki teoremler üzerine yoğunlaşacaktır.

Aslında "teorem" kelimesiyle aynı anlama gelen birkaç tane daha kelimenin varlığının farkında olmak önemlidir ancak bu kelimeler biraz daha farklı şekillerde kullanılır. Genel olarak "teorem" kelimesi önemli olan veya önemli kabul edilen önermeler (örneğin Pisagor teoremi) için rezerve edilir. Doğru fakat çok önemli olmayanlar önermeler için bazen sadece **önerme**[1] kelimesi kullanılır. **Lemma**, asıl amacı başka bir teoremi ispatlamaya yardım etmek olan bir teoremdir. **Sonuç**, bir teorem veya önemenin hemen ardından yapılan doğrudan ve doğal çıkarımdır. Şimdilik bu kelimelerin hepsini hatırlamak çok da önemli değildir. Bunlar kullanıldıkça anlamları yerine oturacaktır.

Asıl amacımız teoremlerin nasıl ispatlandığını öğrenmektir. Yukarıdaki örneklerden görüleceği üzere, teoremleri kanıtlamak için koşullu bir önermenin ne anlama geldiğinin açıkça anlaşılması gerekmektedir. Ünite 2'de koşullu önermeleri kapsamlı bir şekilde çalışmamızın ana sebebi budur. Buna ek olarak tanımların da rolünü anlamak çok önemlidir.

[1] Matematikte, *önerme* kelimesi iki anlamda kullanılır. Bunlardan ilki doğru ya da yanlış bir hüküm bildiren cümleler, ikincisi ise çok önemli olmayan teoremler içindir.

4.2 Tanımlar

Bir teoremin ispatı kesinlikle inandırıcı olmalıdır. Belirsizlikten kaçınılmalı ve her matematiksel terimin tam ve net anlamı konusunda herkes hemfikir olmalıdır. Ünite 1'de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \varnothing$ kümeleri ile $\in$ ve $\subseteq$ sembollerinin anlamlarını tanımladık ve bunları sık bir şekilde kullandık. Şimdi sıklıkla kullanacağımız başka bir tanım verelim.

Tanım 4.1. *Eğer $n = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ var ise n* ***çifttir****.*

Bu tanıma göre örneğin $10 = 2 \cdot 5$ olduğu için 10 çifttir. Diğer taraftan 7 çift değildir çünkü $7 = 2a$ olacak şekilde bir a tamsayısı yoktur. Çift olmayan bir sayıyı tek sayı olarak tanımlamanın yanlış bir tarafı olmasa da aşağıdaki tanım daha elle tutulurdur.

Tanım 4.2. *Eğer $n = 2a + 1$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ var ise n* ***tektir****.*

Buna göre $7 = 2 \cdot 3 + 1$ olduğu için tektir. Ne zaman ki çift veya tek sayı kavramı ortaya çıkarsa bu tanımlar kullanılır. Bir başka deyişle, bir ispatta belirli bir sayının çift olduğunun anlaşılması halinde, yukarıdaki tanım bize uygun bir a tamsayısı kullanılarak bu sayının $2a$ şeklinde yazılabileceğini söyler. Benzer şekilde b bir tamsayı olmak üzere eğer bir sayı $2b+1$ formunda ifade edilebiliyor ise tanım bize bu sayının tek sayı olduğunu söyler.

Tanım 4.3. *Her ikisi de tek veya her ikisi de çift olan iki tamsayı* ***aynı pariteye*** *sahiptir. Aksi halde bu sayılar* ***karşıt paritelidir****.*

Bu tanıma göre 5 ve -17 aynı pariteye sahiptir. Benzer şekilde 8 ve 0 aynı paritelidir. Diğer taraftan 3 ve 4 karşıt paritelidir.

Yeri gelmişken, tanımlar hakkında iki noktaya temas edelim. Birincisi, bu kitapta tanımlanan kelime veya terimler koyu harflerle yazılmıştır. İkincisi, anlamını tam olarak karşılaması açısından, tanımları çift koşullu önermeler olarak ifade etmek daha uygun olmasına rağmen tek koşullu önermeler olarak ifade etmek oldukça yaygındır. Bunu görmek için çift sayı tanımını ele alalım. Bu tanımdan net bir şekilde, eğer n çift ise $n = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır ve eğer $n = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ var ise n çifttir ifadeleri anlaşılmalıdır. Bu nedenle tanım teknik olarak *"Bir n tamsayısı çifttir ancak ve ancak $n = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır."* biçimindedir. Fakat her ne kadar çift koşullu bir önerme şeklinde yorumlansa da, tanımları tek koşullu formda ifade etmek neredeyse evrensel bir kural haline gelmiştir. Bunun kelimeleri ekonomik olarak kullanmaktan başka iyi bir açıklaması yoktur. Tanımları yazmanın standart yolu budur ve buna alışmamız gerekir.

Aşağıda sıklıkla kullanacağımız başka bir tanım verilmiştir.

Tanım 4.4. *Kabul edelim ki a ve b iki tamsayı olsun. Eğer $b = ac$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ var ise $a \mid b$ yazılır ve a* ***böler*** *b diye okunur. Bu durumda, a tamsayısı b'nin bir* ***bölenidir*** *veya b tamsayısı a'nın bir* ***katıdır*** *denir.*

Örneğin, $15 = 3 \cdot 5$ olduğu için 5 tamsayısı 15'i böler. Bunu belirtmek için $5 \mid 15$ yazılır. Benzer şekilde $32 = 8 \cdot 4$ olduğu için $8 \mid 32$ ve $6 = (-6) \cdot (-1)$ olduğu için $-6 \mid 6$ olur. Diğer taraftan, 6 tamsayısı 9'u bölmez çünkü $9 = 6 \cdot c$ olacak şekilde bir c tamsayısı yoktur. Bu durumda "6 *bölmez* 9" denir ve $6 \nmid 9$ yazılır.

Semboller yorumlanırken dikkatli olunmalıdır. Burada $a \mid b$ ile a/b ifadeleri arasında büyük bir fark vardır. Dikkat edilirse $a \mid b$ ifadesi bir önermedir fakat a/b ifadesi bir kesirdir. Örneğin, $8 \mid 16$ ifadesi doğrudur fakat $8 \mid 20$ ifadesi yanlıştır. Buna karşılık $8/16 = 0.5$ ve $8/20 = 0.4$ ifadeleri birer sayıdır fakat önerme değildir. Bunlardan birisini ifade etmek isterken yanlışlıkla diğerini yazmamak için özen gösterilmelidir.

Bir tamsayının bölenlerinden bir küme oluşturulabilir. Örneğin 6 tamsayısının bölenlerinin kümesi $\{a \in \mathbb{Z} : a \mid 6\} = \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$ ile verilir. Benzer şekilde, 5 tamsayısının bölenlerinin kümesi $\{-5, -1, 1, 5\}$ olur. Dikkat edilirse 0 tamsayısının bölenlerinin kümesi $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesidir. Bu bizi aşina olduğumuz aşağıdaki tanıma yönlendirir.

Tanım 4.5. *Sadece iki tane pozitif böleni olan bir n doğal sayısına* ***asal sayı*** *denir. Buradaki pozitif bölenler 1 ve n sayılarıdır.*

Örneğin 2, 5 ve 17 birer asal sayıdır. Bu tanıma göre 1 asal değildir çünkü sadece bir tane (iki tane değil) pozitif böleni vardır ve bu bölen 1'dir. Diğer taraftan $a, b > 1$ olmak üzere $n = ab$ şeklide çarpanlarına ayrılabilen bir n tamsayısına **bileşik sayı** denir.

Tanım 4.6. *Hem a hem de b tamsayılarını aynı anda bölen en büyük sayı* $\mathrm{ebob}(a, b)$ *ile gösterilir ve a ile b'nin* ***en büyük ortak böleni*** *olarak adlandırılır. Sıfırdan farklı a ve b tamsayılarının her ikisinin de katı olan en küçük tamsayı* $\mathrm{ekok}(a, b)$ *ile gösterilir ve a ile b'nin* ***en küçük ortak katı*** *olarak adlandırılır.*

Yukarıdaki tanıma göre $\mathrm{ebob}(18, 24) = 6$, $\mathrm{ebob}(5, 5) = 5$ ve $\mathrm{ebob}(32, -8) = 8$ olur. Ayrıca $\mathrm{ebob}(50, 18) = 2$ fakat $\mathrm{ebob}(50, 9) = 1$ bulunur. Bunlara ek olarak $\mathrm{ebob}(0, 6) = 6$ olur. Çünkü her tamsayının 0 sayısını bölmesine rağmen 6'nın en büyük böleni 6'dır.

Dikkat edilirse $\mathrm{ebob}(0, 0)$ ifadesi sorunludur. Her tamsayı 0 sayısını böler ve buradan sadece $\mathrm{ebob}(0, 0) = \infty$ sonucu çıkar. Bu düzensizliği basit bir şekilde aşmak için $\mathrm{ebob}(a, b)$ ifadesindeki a ve b tamsayılarının en az birinin sıfırdan farklı oluğunu kabul ederiz. Örneklerimize devam edecek olursak $\mathrm{ekok}(4, 6) = 12$ ve $\mathrm{ekok}(7, 7) = 7$ olur.

Kuşkusuz, kullandığımız terimlerin tamamı birden tanımlanamaz. Eğer bir tanımdaki her kelime tanımlanacak olsaydı, burada ortaya çıkan kelimeler için ayrı ayrı tanımların yapılması ve tanımlanan kelimeler zinciri dairesel olana kadar bu sürecin devam ettirilmesi gerekirdi. Bu nedenle hiçbir tanımlama ve doğrulama gerektirmeyen bazı kavramların sezgisel olarak doğru olduğu kabul edebiliriz. Örneğin bir tamsayının (veya reel sayının) ne olduğunu tanımlamaya gerek duymadan kullanabiliriz. Benzer şekilde toplama, çarpma, çıkarma ve bölme işlemlerini tanımlamadan özgür bir şekilde kullanabiliriz. Bunları, toplama ve çarpma işlemlerinin değişme ile dağılma özelliklerindeki ya da aritmetik ve cebirin diğer standart özelliklerindeki gibi, doğru kabul ederek kullanabiliriz.

Bölüm 1.9'da belirtildiği gibi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinin elemanları üzerinde doğal bir sıralamanın var olduğunu kabul edebiliriz. Buna göre örneğin "$5 < 7$" ve "$x < y$ ise $-x > -y$" önermelerini doğrulamaya gerek yoktur.

Bunlara ek olarak, aşağıdaki gözlemi herhangi bir gerekçe veya ispat olmaksızın kabul edebiliriz.

Gözlem 4.1. *Kabul edelim ki a ve b iki tamsayı olsun. Bu durumda aşağıdakile doğrudur:*

- $a + b \in \mathbb{Z}$,
- $a - b \in \mathbb{Z}$,
- $ab \in \mathbb{Z}$.

Bu üç önerme birlikte de kullanılabilir. Örneğin a, b ve c birer tamsayı ise $a^2b - ca + b$ ifadesinin bir tamsayı olduğu görülebilir.

Diğer taraftan, bir a tamsayısının sıfırdan farklı bir b tamsayısına bölünmesiyle q bölümü ve r kalanının elde edileceğini ve bunların tek ve sadece tek oldukları gerçeğini de kabul edebiliriz. Örneğin $a = 17$ tamsayısı 3 ile bölünerek $q = 5$ bölümü ve $r = 2$ kalanı bulunur. Sembolik olarak $17 = 5 \cdot 3 + 2$ veya $a = q \cdot b + r$ yazılabilir. *Bölme algoritması* olarak adlandırılan bu gözlemden 46. sayfada bahsedilmiştir.

(Bölme Algoritması) Kabul edelim ki a ve b iki tamsayı ve $b > 0$ olsun. Bu durumda $a = qb + r$ ve $0 \leqslant r < b$ olacak şekilde q ve r tamsayıları vardır.

İspatı (en azından şimdilik) olmadan kabul ettiğimiz gözlemlerden bir diğeri de 1'den büyük her doğal sayının asal sayıların çarpımı olarak tek bir şekilde yazılmasıdır. Örneğin 1176 sayısı $1176 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılabilir. Burada, *teklikten* kasıtımız 1176 sayısının her asal ayrışımının daima aynı asal çarpanlara (üç tane 2, bir tane 3 ve iki tane 7) sahip olmasıdır. Buna göre örneğin 1176 sayısının 5 çarpanını içeren geçerli hiçbir asal ayrışımı yoktur. Bir sayıyı asal çarpanlara ayırırken, bu sayının farklı asal ayrışımlarının olmayacağı çok açıkmış gibi görünebilir ancak bu, ispatı çok da açık olmayan temel bir gerçektir. Bununla birlikte, 1'den büyük her doğal sayının bir tek asal ayrışıma sahip olduğunu memnuniyetle kabul edebiliriz. (Bu konu Bölüm 10.2'de tekrar ele alınacaktır.)

Kabul edeceğimiz diğer tanım ve gözlemler yeri geldikçe verilecektir.

4.3 Doğrudan İspat Yöntemi

Bu bölümde, koşullu forma sahip teorem ve önermeleri ispatlamak için kullanılan ve **doğrudan ispat yöntemi** olarak adlandırılan sade bir yöntem incelenecektir. Konuyu basitleştirmek açısından, ilk örneklerimiz doğruluğu neredeyse açık olan önermeleri içermektedir. Bu nedenle, buradaki örneklerimizi teoremler yerine *önermeler* olarak adlandıracağız. (Hatırlanacağı üzere, bir önerme doğru olan bir ifadedir ama bir teorem kadar kayda değer değildir.) Doğrudan ispat yönteminin çalışma prensibini anlamak için aşağıdaki formda verilen bir önermeyi göz önüne alalım.

Önerme. *Eğer P ise Q.*

Bu önerme $P \Rightarrow Q$ formundaki koşullu bir önermedir. Amacımız bu koşullu önermenin doğru olduğunu göstermektir. Nasıl başlayacağımızı görmek için aşağıdaki doğruluk tablosunu inceleyelim:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
D	D	D
D	Y	**Y**
Y	D	D
Y	Y	D

Bu tablo, P yanlışken $P \Rightarrow Q$ önermesinin otomatik olarak doğru olduğunu gösterir. O halde $P \Rightarrow Q$ önermesinin doğruluğu gösterilirken, P'nin yanlış olduğu durumlar göz önüne alınmaz çünkü böyle bir durumda (tablonun son iki satırına göre) $P \Rightarrow Q$ otomatik olarak doğrudur. Ancak (tablonun ilk iki satırına göre) P doğruyken çok dikkatli olunmalıdır. Burada P'nin doğru olmasının Q'nun doğru olmasını gerektireceği gösterilmelidir. Bunun anlamı, tablonun ikinci satırının ortaya çıkamayacağıdır.

Bu bize $P \Rightarrow Q$ önermesinin ispatındaki ana hatları verir. İspata P önermesi doğru kabul edilerek başlanır ve bunun Q önermesini doğru olmak zorunda bırakacağı gösterilir. (Hatırlanacağı üzere P'nin yanlış olduğu durumlar için endişe edilmez.) Bu yöntem aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

Özet: Doğrudan İspat Yöntemi

Önerme. *Eğer P ise Q.*

İspat. Kabul edelim ki P olsun.

$\vdots$

Bu nedenle Q doğrudur. □

Doğrudan ispat yöntemindeki kurgu oldukça basittir. İspat *"Kabul edelim ki P olsun."* cümlesiyle başlar ve *"Bu nedenle Q doğrudur."* cümlesiyle biter. İlk ve son cümle arasında mantık, tanımlar ve standart matematiksel doğrular kullanılarak P önermesi Q önermesine transfer edilir. İspatın başlangıcı *"İspat"* kelimesiyle ve bitişi ise yaygın olarak □ sembolü ile belirtilir.

İlk örnek olarak, x tek ise x^2 tektir önermesini ispatlayalım. (Burada belirtmek gerekirse bu çok da etkileyici bir sonuç değildir ancak zamanla daha belirgin sonuçlar ele alınacaktır.) İspatın ilk adımı, doğrudan ispat yönteminin özetinde verilen şablonu doldurmaktır. Bu iş, ana hatları kabataslak çizilen bir resimi boyamaya benzer. İspatın ilk ve son satırları arasında biraz boşluk bırakılır. Kutulardan oluşan aşağıdaki zincir bu boşluğun mantıksal muhakeme çerçevesinde nasıl doldurulacağını adım adım gösterir.

Önerme. *Eğer x tek ise x^2 tektir.*

İspat. Kabul edelim ki x tek olsun.

Bu nedenle x^2 tektir. □

Yukarıda, ispatın ilk ve son satırları yazılmıştır. Aradaki boşluğa, x tek olduğunda x^2 sayısının da tek olmasını gerektiren mantıksal sebepler yazılmalıdır.

Bu yapılırken, konu ile işkilli uygulanabilecek tanımları kullanmak her zaman tavsiye edilir. İlk satır x tamsayısının tek olduğunu söyler. Buna göre, Tanım 4.2 gereğince $x = 2a + 1$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu bilgi ikinci satıra yazılabilir.

Önerme. *Eğer x tek ise x^2 tektir.*

İspat. Kabul edelim ki x tek olsun.

- Tek tamsayı tanımına göre $x = 2a + 1$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.

Bu nedenle x^2 tektir. □

Şimdi, x^2 sayısının tek olduğunu ifade eden son satıra gidelim. Bunun hemen üstündeki satırdan x^2 tektir sonucuna ulaşabilmek için bu satırın ne olması gerektiğini düşünelim. Tek sayı tanımı gereğince, burada $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x^2 = 2a + 1$ formunda yazılmış olmalıdır. Ancak a sembolü daha önce farklı bir amaç için kullanılmıştır. Bu nedenle farklı bir sembol, örneğin b kullanılabilir.

Önerme. *Eğer x tek ise x^2 tektir.*

İspat. Kabul edelim ki x tek olsun.

- Tek tamsayı tanımına göre $x = 2a + 1$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.

- O halde $x^2 = 2b + 1$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ vardır.

Bu nedenle x^2 tektir. □

İspat neredeyse tamamlanmıştır. Son olarak aradaki boşluk aşağıdaki gibi doldurulabilir.

Önerme. *Eğer x tek ise x^2 tektir.*

İspat. Kabul edelim ki x tek olsun.

- Tek tamsayı tanımına göre $x = 2a + 1$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.
- Buradan $x^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1$ bulunur.
- Böylece $b = 2a^2 + 2a$ olmak üzere $x^2 = 2b + 1$ yazılabilir.
- O halde $x^2 = 2b + 1$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ vardır.

Bu nedenle x^2 tektir. □

Son olarak, yaptığımız işi bir paragraf şeklinde yazabiliriz. Buna göre ispatın son hali şu şekildedir.

Önerme. *Eğer x tek ise x^2 tektir.*

İspat. Kabul edelim ki x tek olsun. Tek tamsayı tanımına göre $x = 2a+1$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $x^2 = (2a+1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1$ bulunur. Böylece $b = 2a^2 + 2a$ olmak üzere $x^2 = 2b + 1$ yazılabilir. O halde $x^2 = 2b + 1$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu nedenle x^2 tektir. □

Bir ispat başlarken, yukarıda yaptığımız gibi ilk ve son satırları yazmak, daha sonra gerektiğinde yukarı ile aşağı arasında gidip gelerek ortada buluşuncaya dek aradaki boşluğu doldurmak genellikle iyi bir fikirdir. Bu sürekli olarak size amacınızın ne olduğunu hatırlatır. Bazen gereğinden fazla, bazen yetersiz miktarda boşluk bırakabilirsiniz. Bazen de ne yapacağınızı bulmadan önce tıkanıp kalabilirsiniz. Bunların hepsi normaldir. Ressamların resimleri için başta kabataslak çizim yaptıkları gibi matematikçiler de ispatları için başta karalama yapar.

Şimdi başka bir örnek inceleyelim. Aşağıdaki önermeyi ispatlamak istediğimizi düşünelim.

Önerme. *Kabul edelim ki a, b ve c birer tamsayı olsun. Eğer $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$ olur.*

Doğrudan ispat yöntemini ana hatlarıyla kullanalım. Bu prosedürü açıklamak için ispat aşamalarını yine adım adım yazalım.

Önerme. *Kabul edelim ki a, b ve c birer tamsayı olsun. Eğer $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$ olur.*

İspat. Kabul edelim ki $a \mid b$ ve $b \mid c$ olsun.

Bu nedenle $a \mid c$ olur. □

Başlangıç adımı olarak ilk satırda Tanım 4.4 uygulanabilir. Buna göre $a \mid b$ ifadesi $b = ac$ olacak şekilde bir c tamsayısının var olması anlamına gelir. Ancak c sembolü ilk satırda farklı bir anlamda kullanılmıştır. Bu nedenle burada başka bir harf, örneğin d kullanılabilir. Benzer şekilde, $b \mid c$ ifadesinin tanımında e harfi kullanılabilir.

Önerme. *Kabul edelim ki a, b ve c birer tamsayı olsun. Eğer $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$ olur.*

İspat. Kabul edelim ki $a \mid b$ ve $b \mid c$ olsun.

- Tanım 4.4 gereğince, $a \mid b$ ise $b = ad$ olacak şekilde bir d tamsayısı vardır.
- Benzer şekilde $b \mid c$ ise $c = be$ olacak şekilde bir e tamsayısı vardır.

Bu nedenle $a \mid c$ olur. □

Aradaki boşluğu neredeyse doldurduk. Sondan bir önceki satır $a \mid c$ olduğunu göstermelidir. Bu satır, Tanım 4.4'e göre $c = ax$ olacak şekilde bir x tamsayısının var olduğunu söylemelidir. Bu eşitlik, üst taraftaki satırlardan şu şekilde elde edilir.

Önerme. *Kabul edelim ki a, b ve c birer tamsayı olsun. Eğer $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$ olur.*

İspat. Kabul edelim ki $a \mid b$ ve $b \mid c$ olsun.

- Tanım 4.4 gereğince, $a \mid b$ ise $b = ad$ olacak şekilde bir d tamsayısı vardır.
- Benzer şekilde $b \mid c$ ise $c = be$ olacak şekilde bir e tamsayısı vardır.
- Buna göre $c = be = (ad)e = a(de)$ olur ve böylece $x = de$ seçilerek $c = ax$ bulunur.

Bu nedenle $a \mid c$ olur. □

Bir sonraki örnek, ispatın tüm aşamalarını adım adım sunmak yerine tek seferde gösterir.

Önerme. *Eğer x çift bir tamsayı ise $x^2 - 6x + 5$ tektir.*

İspat. Kabul edelim ki x çift olsun.

- Çift sayı tanımına göre $x = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.
- Buradan $x^2 - 6x + 5 = (2a)^2 - 6(2a) + 5 = 4a^2 - 12a + 5 = 4a^2 - 12a + 4 + 1 = 2(2a^2 - 6a + 2) + 1$ bulunur.
- Böylece $b = 2a^2 - 6a + 2 \in \mathbb{Z}$ seçilerek $x^2 - 6x + 5 = 2b + 1$ yazılabilir.

Sonuç olarak, tek sayı tanımı gereğince $x^2 - 6x + 5$ tektir. □

Normalde hiç kimse ispatın her cümlesi için ayrı bir satır kullanmaz fakat açık bir şekilde anlaşılması için bu kitabın ilk birkaç ünitesinde bunu sıklıkla yapacağız. Şimdiki örneğimiz iki niceliğin eşit olduğunu göstermek için kullanılan standart tekniği gösterecektir. Eğer $m \leqslant n$ ve $n \leqslant m$ olduğu gösterilebilirse $m = n$ olmak zorundadır. Genel olarak $m \leqslant n$ ifadesini göstermek için kullanılan sebep $n \leqslant m$ için kullanılan sebepten oldukça farklı olabilir.

Bu örnek için 108. sayfada yer alan Tanım 4.6'daki en küçük ortak kat kavramını hatırlayalım.

Önerme. *Eğer* $a, b, c \in \mathbb{N}$ *ise* $\operatorname{ekok}(ca, cb) = c \cdot \operatorname{ekok}(a, b)$ *olur.*

İspat. Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre $m = \operatorname{ekok}(ca, cb)$ ve $n = c \cdot \operatorname{ekok}(a, b)$ olmak üzere $m = n$ olduğunu gösterelim. Tanımı gereği, $\operatorname{ekok}(a, b)$ ifadesi a ile b sayılarının her ikisinin de katıdır. O halde $\operatorname{ekok}(a, b) = ax = by$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $n = c \cdot \operatorname{ekok}(a, b) = cax = cby$ olacağı için n tamsayısı hem ca hem de cb sayısının bir ortak katıdır. Fakat $m = \operatorname{ekok}(ca, cb)$ sayısı ca ile cb sayılarının ortak katlarının en küçüğüdür. Böylece $m \leqslant n$ olmalıdır.

Diğer taraftan $m = \operatorname{ekok}(ca, cb)$ sayısı ca ve cb sayılarının bir katı olduğu için $m = cax = cby$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre $\frac{1}{c}m = ax = by$ sayısı a ve b sayılarının her ikisinin de bir katıdır. Bundan dolayı $\operatorname{ekok}(a, b) \leqslant \frac{1}{c}m$ yani $c \cdot \operatorname{ekok}(a, b) \leqslant m$ bulunur. Böylece $n \leqslant m$ elde edilir.

O halde $m \leqslant n$ ve $n \leqslant m$ olduğu gösterilmiştir. Buna göre $m = n$ bulunarak ispat tamamlanır. □

Şu ana kadar incelediğimiz bütün örneklerde tamsayılarla ilgili önermelerin ispatlarıyla ilgilendik. Bir sonraki örnekte, x ve y pozitif reel sayılar olmak üzere $x \leqslant y$ ise $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$ olduğunu kanıtlayacağız. Burada yapacağımız ispatın daha öncekiler kadar "otomatik" olmadığını hissedebilirsiniz. İspatta atılması gereken doğru adımları bulmak zor olabilir ancak işin eğlenceli tarafı da budur.

Önerme. *Herhangi x ve y pozitif reel sayıları verilsin. Eğer $x \leqslant y$ ise $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$ olur.*

İspat. Kabul edelim ki $x \leqslant y$ olsun.

- Bu eşitsizliğin her iki tarafından y çıkarılarak $x - y \leqslant 0$ bulunur.
- Buradan $(\sqrt{x})^2 - \left(\sqrt{y}\right)^2 \leqslant 0$ yazılabilir.
- Bu ifade çarpanlarına ayrılarak $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \leqslant 0$ elde edilir.
- Bu eşitsizliğin her iki tarafı pozitif $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ sayısına bölünerek $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant 0$ bulunur.

Son eşitsizliğin her iki tarafına $\sqrt{y}$ eklenerek $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$ elde edilir. □

Bu önerme $x \leqslant y$ eşitsizliği sağlandığında, her iki tarafın karekökü alınarak $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{y}$ elde edileceğini garanti eder. Bir sonraki önermede göreceğimiz üzere bu bilgi yararlı olabilir.

Şimdi ele alacağımız önerme $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$ eşitsizliğiyle ilgilidir. Dikkat edilirse buradaki değişkenlerin yerine yazılan rastgele pozitif sayılar için bu ifadenin doğru olduğu görülebilir. Örneğin $x = 6$ ve $y = 4$ olması halinde eşitliğin sol tarafında elde edilen $2\sqrt{6 \cdot 4} = 4\sqrt{6} \approx 9.79$ sayısı, sağ tarafında elde edilen $6 + 4 = 10$ sayısından daha küçüktür. Buna göre pozitif her x ve y için $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$ ifadesi doğru mudur? Eğer doğru ise bu nasıl ispatlanabilir?

Bunu görmek için ilk önce verilen ifadeyi koşullu bir önerme formunda yazalım: Eğer x ve y pozitif reel sayılar ise $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$ olur. Buna göre ispat x ile y sayılarını pozitif kabul ederek başlar ve $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$ ifadesiyle biter. İspat planını tasarlarken, $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$ ile başlayıp doğru gözlemler yaparak sondan başa doğru hareket etmek faydalı olabilir. Daha sonra adımların yönü tersine çevrilerek ispat yazılabilir. Bu amaçla, $2\sqrt{xy} \leqslant x+y$ ifadesinde her iki tarafın karesi alınarak

$$4xy \leqslant x^2 + 2xy + y^2$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafından $4xy$ çıkarılır ve elde edilen ifade çarpalarına ayrılırsa

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant x^2 - 2xy + y^2 \\ 0 &\leqslant (x - y)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $x - y$ sayısının karesi negatif olamayacağı için son satır açıkça doğrudur! Bu bize aşağıdaki gibi bir ispat stratejisi verir.

Önerme. *Eğer x ve y pozitif reel sayılar ise $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$ olur.*

İspat. Kabul edelim ki x ve y pozitif reel sayılar olsun.

- Buradan $0 \leqslant (x - y)^2$ yani $0 \leqslant x^2 - 2xy + y^2$ bulunur.
- Bu eşitsizliğin her iki tarafına $4xy$ eklenerek $4xy \leqslant x^2 + 2xy + y^2$ elde edilir.
- Buradan $4xy \leqslant (x + y)^2$ bulunur.
- Daha önce ispatlandığı üzere bir eşitsizlikte her iki tarafın karekökünü almak eşitsizliği bozmaz.

Böylece $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$ elde edilir. □

İspatın son satırına dikkat edilirse $4xy \leqslant (x+y)^2$ eşisizliğinin her iki tarafının karekökü alınarak $\sqrt{4xy} \leqslant \sqrt{(x + y)^2}$ elde edilmiştir. Buradaki $\leqslant$ sembolü, önceki önermenin bir sonucu olarak yön değiştirmemiştir. Bu önemli bir noktadır. Genellikle bir önermenin ya da teoreminin ispatında (daha önce ispatlanmış) başka bir önerme ya da teorem kullanılır.

4.4 Durum İncelemeli İspat

Bir ispat yapılırken, önermenin olması ihtimal dahilinde olan her senaryoda doğru olduğunu göstermek için birden çok durumun incelenmesi gerekebilir. Şimdi, bu türdeki birkaç örneği inceleyelim.

Örneklerimiz $1 + (-1)^n(2n - 1)$ ifadesiyle ilgili olacaktır. Aşağıdaki tablo, çeşitli n tamsayı değerlerine karşılık bu ifadenin aldığı değerleri verir. Dikkat edilirse $1 + (-1)^n(2n - 1)$ ifadesi her satırda 4'ün bir katıdır.

n	$1 + (-1)^n(2n - 1)$
1	0
2	4
3	-4
4	8
5	-8
6	12

Buna göre $1 + (-1)^n(2n - 1)$ ifadesinin her zaman 4'ün bir katı olup olmadığı sorusu akla gelir. Bir sonraki örnek bu sorunun cevabının "evet" olduğunu gösterecektir. Dikkat edilirse n tamsayısının tek veya çift olmasına göre $1 + (-1)^n(2n - 1)$ ifadesi farklı davranmaktadır. Bu davranış n tekse $(-1)^n = -1$ ve n çiftse $(-1)^n = 1$ olmasına göre değişir. Bu nedenle ispat yapılırken bu iki durum ayrı ayrı incelenmelidir.

Önerme. *Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $1 + (-1)^n(2n - 1)$ ifadesi 4'ün katıdır.*

İspat. Kabul edelim ki $n \in \mathbb{N}$ olsun.

- Buna göre n ya tektir ya da çifttir.
- Şimdi bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

  1. Durum. Kabul edelim ki n çift olsun. Bir $k \in \mathbb{Z}$ için $n = 2k$ yazılabilir ve $(-1)^n = 1$ olur. O halde $1 + (-1)^n(2n - 1) = 1 + (1)(2 \cdot 2k - 1) = 4k$ sayısı 4'ün katıdır.

  2. Durum. Kabul edelim ki n tek olsun. Bir $k \in \mathbb{Z}$ için $n = 2k + 1$ yazılabilir ve $(-1)^n = -1$ olur. O halde $1 + (-1)^n(2n - 1) = 1 - (2 \cdot (2k + 1) - 1) = -4k$ sayısı 4'ün katıdır.

Her iki durum da $1 + (-1)^n(2n - 1)$ ifadesi daima 4 tamsayısının bir katıdır. □

Şimdi soruyu tersten soralım: $1 + (-1)^n(2n - 1)$ ifadesi daima 4'ün bir katıdır ancak 4'ün *her* katı bu şekilde yazılabilir mi? Aşağıdaki önerme ve ispatı bu soruya olumlu cevap verir.

Önerme. *4 tamsayısının her katı $1+(-1)^n(2n-1)$ ifadesine eşit olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.*

İspat. Bu önermeyi koşullu formda yazalım: Eğer k tamsayısı 4'ün bir katı ise $1+(-1)^n(2n-1) = k$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi bu koşullu önermeyi ispatlayalım.

- Kabul edelim ki k tamsayısı 4'ün bir katı olsun.
- Bu durumda $k = 4a$ olacak şekilde bir a tamsayısı vardır.
- Buna göre $1 + (-1)^n(2n - 1) = k$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ üretilmelidir.
- Bu iş a tamsayısının sıfır, pozitif veya negatif olma durumları ayrı ayrı incelenerek yapılır.

  1. Durum. Kabul edelim ki $a = 0$ olsun. Bu durumda $n = 1$ seçilirse $1 + (-1)^n(2n - 1) = 1 + (-1)^1(2 - 1) = 0 = 4 \cdot 0 = 4a = k$ olur.

  2. Durum. Kabul edelim ki $a > 0$ olsun. Buna göre $n = 2a$ seçilirse n çift olduğundan $(-1)^n = 1$ olur. Buradan $1 + (-1)^n(2n - 1) = 1 + (2n - 1) = 2n = 2(2a) = 4a = k$ olur.

  3. Durum. Kabul edelim ki $a < 0$ olsun. Bu durumda $n = 1 - 2a$ seçilirse a negatif olduğu için n pozitif bir doğal sayıdır. Buna ek olarak n tek olduğu için $(-1)^n = -1$ olur. Buradan $1 + (-1)^n(2n - 1) = 1 - (2n - 1) = 1 - 2((1 - 2a) - 1) = 4a = k$ bulunur.

Yukarıda incelenen farklı durumlar uyarınca, $4k$ sayısı 4'ün sıfır, pozitif veya negatif hangi katı olursa olsun, $k = 1 + (-1)^n(2n - 1)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ daima vardır. □

4.5 Benzer Durumlar

Bazı ispatlarda iki veya daha fazla durum birbirlerine oldukça benzerdir ve bunların ispatlarının ayrı ayrı yazılması sıkıcı ve gereksizdir. Şimdi bunun bir örneğini verelim.

Önerme. *Eğer iki tane tamsayı karşıt pariteli ise bunların toplamı tektir.*

İspat. Kabul edelim ki m ve n karşıt pariteye sahip iki tamsayı olsun. Bu durumda $m + n$ tamsayısının tek olduğu gösterilmelidir. Bu iş aşağıdaki gibi iki farklı durum incelenerek yapılabilir.

1. Durum. Kabul edelim ki m çift ve n tek olsun. O halde $m = 2a$ ve $n = 2b + 1$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır. Buna göre (Tanım 4.2'den) $m + n = 2a + 2b + 1 = 2(a + b) + 1$ sayısı tektir.

2. Durum. Kabul edelim ki m tek ve n çift olsun. O halde $m = 2a + 1$ ve $n = 2b$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır. Buna göre (Tanım 4.2'den) $m + n = 2a + 1 + 2b = 2(a + b) + 1$ sayısı tektir.

Her iki durumda da $m + n$ tektir. □

Yukarıdaki durumların her ikisinde de çift ve tek terimlerin sırası dışındaki herşey aynıdır. Bu nedenle sadece bir durumun ispatını vererek diğerinin ispatının neredeyse aynı olduğunu belirtmek yerinde bir yaklaşımdır. Buna göre neredeyse aynı olan birçok durumdan sadece bir tanesine ispatta yer verileceğinin işareti *"Genelliği bozmadan ... "* veya *"Genellik kaybı olmaksızın ... "* ifadelerinden biri kullanılarak yapılır. Yukarıdaki örneğin ikinci bir versiyonu şu şekildedir.

Önerme. *Eğer iki tane tamsayı karşıt pariteli ise bunların toplamı tektir.*

İspat. Kabul edelim ki m ve n karşıt pariteye sahip iki tamsayı olsun.

- Bu durumda $m + n$ tamsayısının tek olduğu göstermeliyiz.
- Genelliği bozmadan, m çift ve n tek olsun.
- Bu durumda $m = 2a$ ve $n = 2b + 1$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır.

Buna göre (Tanım 4.2'den) $m + n = 2a + 2b + 1 = 2(a + b) + 1$ sayısı tektir. □

Diğer ders kitaplarındaki ispatları okurken, bazı ifadelerin kısaltılarak kullanıldığını görebilirsiniz ancak şeffaflık açısından biz bu tür kısaltmalardan kaçınacağız. Bu anlayışla, en azından ispatları yazım konusunda daha tecrübeli hale gelene kadar, durumlar ne kadar benzeşse de ispatları ayrı ayrı yazmanız tavsiye edilebilir.

Aşağıdaki alıştırmaları çözerek konuyu ne kadar kavradığınızı kontrol edebilirsiniz. Tek numaralı problemlerin tam ispatlarını kitabın sonundaki Çözümler bölümünde bulabilirsiniz.

Alıştırmalar

Doğrudan ispat yöntemini kullanarak aşağıdaki önermeleri ispatlayınız.

1. Eğer x çift ise x^2 çifttir.
2. Eğer x tek ise x^3 tektir.
3. Eğer a tek ise $a^2 + 3a + 5$ tektir.
4. Kabul edelim ki $x, y \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer x ve y tek ise xy tektir.

5. Kabul edelim ki $x, y \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer x çift ise xy çifttir.

6. Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise $a \mid (b + c)$ olur.

7. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid b$ ise $a^2 \mid b^2$ olur.

8. Kabul edelim ki a bir tamsayı olsun. Eğer $5 \mid 2a$ ise $5 \mid a$ olur.

9. Kabul edelim ki a bir tamsayı olsun. Eğer $7 \mid 4a$ ise $7 \mid a$ olur.

10. Kabul edelim ki a ve b iki tamsayı olsun. Eğer $a \mid b$ ise $a \mid (3b^3 - b^2 + 5b)$ olur.

11. Kabul edelim ki $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid b$ ve $c \mid d$ ise $ac \mid bd$ olur.

12. Eğer $x \in \mathbb{R}$ ve $0 < x < 4$ ise $\frac{4}{x(x-4)} \geqslant 1$ olur.

13. Kabul edelim ki $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $x^2 + 5y = y^2 + 5x$ ise $x = y$ veya $x + y = 5$ olmalıdır.

14. Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ise $5n^2 + 3n + 7$ tektir. (Durum incelemesini deneyiniz.)

15. Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ise $n^2 + 3n + 4$ çifttir. (Durum incelemesini deneyiniz.)

16. Eğer iki tamsayı aynı pariteli ise bunların toplamı çifttir. (Durum incelemesini deneyiniz.)

17. Eğer iki tamsayı karşıt pariteli ise bunların çarpımları çifttir.

18. Kabul edelim ki x ve y pozitif tamsayılar olsun. Eğer $x < y$ ise $x^2 < y^2$ olur.

19. Kabul edelim ki a, b ve c tamsayılar olsun. Eğer $a^2 \mid b$ ve $b^3 \mid c$ ise $a^6 \mid c$ olur.

20. Eğer a bir tamsayı ve $a^2 \mid a$ ise $a \in \{-1, 0, 1\}$ olur.

21. Kabul edelim ki p bir asal sayı olsun. Eğer $k \in \mathbb{Z}$ ve $0 < k < p$ ise p asalı $\binom{p}{k}$ sayısını böler.

22. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $n^2 = 2\binom{n}{2} + \binom{n}{1}$ olur. (Burada, $n = 1$ durumu için ayrı incelenme yapılmalıdır).

23. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $\binom{2n}{n}$ çifttir.

24. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geqslant 2$ ise $n! + 2, n! + 3, n! + 4, n! + 5, \ldots, n! + n$ sayılarının tamamı bileşiktir. (Bu nedenle her $n \geqslant 2$ için n tane ardışık bileşik sayı bulunabilir. Bu, asal sayılar arasında keyfi büyüklükte "boşluklar" olabileceği anlamına gelir.)

25. Eğer $a, b, c \in \mathbb{N}$ ve $c \leqslant b \leqslant a$ ise $\binom{a}{b}\binom{b}{c} = \binom{a}{b-c}\binom{a-b+c}{c}$ olur.

26. Her tek tamsayı iki kare farkı şeklinde yazılabilir. (Örneğin $7 = 4^2 - 3^2$ vb.)

27. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $\text{ebob}(a, b) > 1$ ise ya b asal değildir ya da $b \mid a$ olur.

28. Eğer $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ise $c \cdot \text{ebob}(a, b) \leqslant \text{ebob}(ca, cb)$ olur.

Bölüm 5

Dolaylı İspat

Bu ünitede, doğrudan ispat yönteminin bir alternatifi olan **dolaylı ispat** yöntemini inceleyeceğiz. Doğrudan ispat yönteminde olduğu gibi, dolaylı ispat yöntemi de *"Eğer P ise Q."* formundaki koşullu önermeleri ispatlamak için kullanılır. Bu önermelere doğrudan ispat yöntemi her zaman uygulanabilir olsa da, bazı durumlarda dolaylı ispat yöntemini kullanmak çok daha kolaydır.

5.1 Dolaylı İspat Yöntemi

Dolaylı ispat yönteminin çalışma prensibini anlayabilmek için aşağıdaki formda verilen bir önermeyi ispatlamak istediğimizi düşünelim.

Önerme. *Eğer P ise Q.*

Bu önerme, $P \Rightarrow Q$ formundaki koşullu bir önermedir. Amacımız bu önermenin doğru olduğunu göstermektir. Bölüm 2.6'dan hatırlanacağı üzere, $P \Rightarrow Q$ önermesi mantıksal olarak $\sim Q \Rightarrow \sim P$ önermesine denktir. Bunu görmek için doğruluk tablosunu tekrardan yazalım:

P	Q	$\sim Q$	$\sim P$	$P \Rightarrow Q$	$\sim Q \Rightarrow \sim P$
D	D	Y	Y	**D**	**D**
D	Y	D	Y	**Y**	**Y**
Y	D	Y	D	**D**	**D**
Y	Y	D	D	**D**	**D**

Bu tabloya göre $P \Rightarrow Q$ ve $\sim Q \Rightarrow \sim P$ önermeleri aynı şeyi farklı şekilde ifade etme yollarıdır. Buradaki $\sim Q \Rightarrow \sim P$ önermesine $P \Rightarrow Q$ önermesinin **karşıt tersi** denir.[1]

Sonuç olarak $P \Rightarrow Q$ ve $\sim Q \Rightarrow \sim P$ mantıksal olarak denktir. Buna göre, $P \Rightarrow Q$ önermesini doğrulamak için, bunun yerine $\sim Q \Rightarrow \sim P$ önermesini ispatlamak yeterlidir. Eğer $\sim Q \Rightarrow \sim P$

[1] *Karşıt* ve *karşıt ters* kavramları karıştırılmamalıdır. Bölüm 2.4'ten hatırlanacağı üzere $P \Rightarrow Q$ önermesinin *karşıtı* $Q \Rightarrow P$ önermesidir. Fakat $Q \Rightarrow P$ karşıt önermesi mantıksal olarak $P \Rightarrow Q$ önermesine denk değildir.

önermesini doğrudan ispat yöntemiyle gösterecek olsaydık, $\sim Q$ önermesini doğru kabul ederek, buradan $\sim P$ önermesinin doğru olduğu sonucuna ulaşırdık. Aslında bu fikir, ana hatları aşağıda verilen dolaylı ispat yöntemindeki temel yaklaşımdır.

Özet: Dolaylı İspat Yöntemi

Önerme. *Eğer P ise Q.*

İspat. Kabul edelim ki $\sim Q$ olsun.

$\vdots$

Bu nedenle $\sim P$ olur. □

Dolaylı ispat yöntemindeki kurgu oldukça sadedir. İspat *"Q önermesi doğru olmasın."* ya da buna denk olan bir cümle ile başlar ve *"Bu nedenle P önermesi yanlıştır"* cümlesi ile biter. Bu iki cümle arasında mantık ve tanımlar kullanılarak $\sim Q$ ifadesi $\sim P$ ifadesine dönüştürülür.

Bu yeni metodu göstermek ve doğrudan ispat yöntemi ile karşılaştırmak için aşağıdaki önermeyi her iki yöntemle de ispatlayalım.

Önerme. *Bir $x \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer $7x + 9$ çift ise x tektir.*

İspat. (Doğrudan ispat) Kabul edelim ki $7x + 9$ çift olsun.

- Bu durumda $7x + 9 = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.
- Bu eşitliğin her iki tarafından $6x + 9$ çıkarılarak $x = 2a - 6x - 9$ elde edilir.
- Buradan $x = 2a - 6x - 9 = 2a - 6x - 10 + 1 = 2(a - 3x - 5) + 1$ yazılabilir.
- Buna göre $b = a - 3x - 5$ seçilerek $a = 2b + 1$ bulunur.

Sonuç olarak x tektir. □

Şimdi aynı önermeyi dolaylı ispat yöntemiyle ispatlayalım.

Önerme. *Bir $x \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer $7x + 9$ çift ise x tektir.*

İspat. (Dolaylı ispat) Kabul edelim ki x tek olmasın.

- Bu durumda x çifttir ve böylece $x = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.
- Buradan $7x + 9 = 7(2a) + 9 = 14a + 8 + 1 = 2(7a + 4) + 1$ yazılabilir.

- Buna göre $b = 7a + 4$ seçilerek $7x + 9 = 2b + 1$ bulunur.
- O halde $7x + 9$ tektir.

Sonuç olarak $7x + 9$ çift değildir. □

Her iki ispat yöntemide aynı uzunlukta olmasına rağmen, dolaylı ispat yönteminin daha akıcı olduğunu hissetmiş olabilirsiniz. Bunun sebebi, x hakkında verilen bilgiden $7x + 9$ hakkında bilgi elde etmek, bunun tersini yapmaktan daha kolaydır. Bir sonraki örneğimizde yine bir x tamsayısı ile ilgili olan aşağıdaki önermeyi ele alalım.

Önerme. *Eğer $x^2 - 6x + 5$ çift ise x tektir.*

Burada doğrudan ispat yöntemini kullanmak problem yaratacaktır. İspata $x^2 - 6x + 5$ ifadesini çift kabul ederek başlayabilir ve $x^2 - 6x + 5 = 2a$ yazabiliriz. Bu ifadeyi bir $b \in \mathbb{Z}$ kullanarak $x = 2b + 1$ formuna dönüştürmemiz gerekir. Kudaratik bir denklemdeki x bilinmeyenin yalnız bırakılmasını gerektiren bu işin nasıl yapılacağı çok da açık değildir. Dolayı ispat yönteminin kullanılması halinde ise ispat oldukça basitleşir.

Önerme. *Bir $x \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer $x^2 - 6x + 5$ çift ise x tektir.*

İspat. (Dolaylı ispat) Kabul edelim ki x tek olmasın.

- Bu durumda x çifttir ve $x = 2a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır.
- Buna göre $x^2 - 6x + 5 = (2a)^2 - 6(2a) + 5 = 4a^2 - 12a + 4 + 1 = 2(2a^2 - 6a + 2) + 1$ yazılabilir.
- Burada $b = 2a^2 - 6a + 2$ tamsayısı olarak seçilirse $x^2 - 6x + 5 = 2b + 1$ olur.
- O halde $x^2 - 6x + 5$ tektir.

Sonuç olarak $x^2 - 6x + 5$ çift değildir. □

Özetleyecek olursak, x tamsayısının tek olmaması $(\sim Q)$, $x^2 - 6x + 5$ ifadesinin çift olmamasını $(\sim P)$ gerektireceği için, $x^2 - 6x + 5$ ifadesinin çift olması (P), x tamsayısının tek olması (Q) anlamına gelir. Böylece $\sim Q \Rightarrow \sim P$ ispatlanarak $P \Rightarrow Q$ kanıtlanmış olur. Şimdi bunu başka bir örnek ile inceleyelim.

Önerme. *Herhangi $x, y \in \mathbb{R}$ verilsin. Eğer $y^3 + yx^2 \leqslant x^3 + xy^2$ ise $y \leqslant x$ olur.*

İspat. (Dolaylı ispat) Kabul edelim ki $y \leqslant x$ ifadesi yanlış olsun. Bu durumda $y > x$ yani $y - x > 0$ olmalıdır. Bu eşitsizliğin her iki tarafı pozitif olan $x^2 + y^2$ ifadesiyle çarpılarak

$$
\begin{aligned}
(y - x)(x^2 + y^2) &> 0\,(x^2 + y^2) \\
yx^2 + y^3 - x^3 - xy^2 &> 0 \\
yx^2 + y^3 &> x^3 + xy^2
\end{aligned}
$$

bulunur. Buna göre $yx^2 + y^3 > x^3 + xy^2$ olduğu için $yx^2 + y^3 \leqslant x^3 + xy^2$ ifadesi doğru olamaz. □

"Eğer P ise Q." önermesinin dolaylı yoldan yapılan ispatında $\sim P$ ve $\sim Q$ olumsuz önermeleri bulunmasını gerektirir. Bu iş için için Bölüm 2.10'da verilen yöntemler (örneğin DeMorgan kuralları vb.) kullanılabilir. Şimdi bunu bir örnek ile inceleyelim.

Önerme. *Herhangi $x, y \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer $5 \nmid xy$ ise $5 \nmid x$ ve $5 \nmid y$ olur.*

İspat. (Dolaylı ispat) Kabul edelim ki ($5 \nmid x$ **ve** $5 \nmid y$) ifadesi doğru olmasın.

- DeMorgan kurallarından, $5 \nmid x$ doğru değildir **veya** $5 \nmid y$ doğru değildir.
- Buna göre $5 \mid x$ veya $5 \mid y$ olmalıdır. Şimdi bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim:
  1. **Durum.** Kabul edelim ki $5 \mid x$ olsun. Buna göre $x = 5a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $xy = 5(ay)$ bulunur. Bu eşitlik $5 \mid xy$ anlamına gelir.
  2. **Durum** Kabul edelim ki $5 \mid y$ olsun. Buna göre $y = 5a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $xy = 5(ax)$ bulunur. Bu eşitlik $5 \mid xy$ anlamına gelir.

Yukarıdaki her iki durum da $5 \mid xy$ olduğunu gösterir. O halde $5 \nmid xy$ ifadesi doğru değildir. □

5.2 Tamsayılarda Denklik

Şimdi yeni bir tanım vermenin tam da vakti gelmiştir. Dolaylı ispat yöntemiyle çok bağlantılı olmasa da, bu tanımın burada verilmesi bize ispat tekniklerini uygulama açısından geniş bir örnek yelpazesi sunacaktır. Matematiğin birçok dalında karşılaşılan bu tanım, diğer derslerinizde de önemli bir rol oynayacaktır. Fakat bunun burada verilmesinin asıl sebebi, ispatların yazımında bize daha çok pratik kazandıracak olmasıdır.

Tanım 5.1. *Herhangi iki a ve b tamsayısı ile bir $n \in \mathbb{N}$ verilsin. Eğer $n \mid (a - b)$ ise a ile b tamsayılarına n **modülüne göre denktir** denir ve $a \equiv b \pmod{n}$ yazılır. Eğer a ve b tamsayıları n modülüne göre denk değil ise $a \not\equiv b \pmod{n}$ yazılır.*

Örnek 5.1. Aşağıda bazı örnekler verilmiştir:

1. $9 \equiv 1 \pmod 4$ çünkü $4 \mid (9-1)$.

2. $6 \equiv 10 \pmod 4$ çünkü $4 \mid (6-10)$.

3. $14 \not\equiv 8 \pmod 4$ çünkü $4 \nmid (14-8)$.

4. $20 \equiv 4 \pmod 8$ çünkü $8 \mid (20-4)$.

5. $17 \equiv -4 \pmod 3$ çünkü $3 \mid (17-(-4))$.

Pratik anlamda $a \equiv b \pmod n$ ifadesi a ve b tamsayılarının n ile bölümünden kalan sayıların eşit olması anlamına gelir. Örneğin, yukarıda $6 \equiv 10 \pmod 4$ yazılmıştır. Gerçekten de 6 ve 10 tamsayılarının 4 ile bölümlerinden 2 kalır. Ayrıca 14 ve 8 tamsayılarının 4 ile bölümlerinden sırası ile 2 ve 0 kaldığı için $14 \not\equiv 8 \pmod 4$ yazılır.

Şimdi bunun genel olarak doğru olduğunu gösterelim. Eğer a ve b sayıları n ile bölündüklerinde aynı r kalanını veriyor ise $a = kn + r$ ve $b = ln + r$ olacak şekilde $k, l \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $a-b = (kn+r)-(ln+r) = n(k-l)$ bulunur. Buna göre, $(a-b) = n(k-l)$ olması $n \mid (a-b)$ anlamına gelir. Buradan $a \equiv b \pmod n$ elde edilir. Diğer taraftan $a \equiv b \pmod n$ iken a ve b tamsayılarının n ile bölümlerinden kalan sayıların eşit olduklarının gösterilmesi, bu ünitenin sonunda bir alıştırma olarak bırakılmıştır.

Bu bölümü tamsayıların denkliğini içeren birkaç tane ispat ile bitirelim ancak alıştırmalar kısmındaki ispatlar ile kendinizi yeteneklerinizi test edebilirsiniz.

Önerme. *Herhangi $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ verilsin. Eğer $a \equiv b \pmod n$ ise $a^2 \equiv b^2 \pmod n$ olur.*

İspat. Doğrudan ispat yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki $a \equiv b \pmod n$ olsun.

- Tamsayılardaki denklik tanımından $n \mid (a-b)$ yazılabilir.

- Bölme işleminin tanımana göre $a - b = nc$ olacak şekilde bir c tamsayısı vardır.

- Şimdi bu denklemin her iki tarafını $a + b$ ile çarpalım:

$$\begin{aligned} a-b &= nc \\ (a-b)(a+b) &= nc(a+b) \\ a^2 - b^2 &= nc(a+b) \end{aligned}$$

- Dikkat edilirse $c(a+b) \in \mathbb{Z}$ olduğu için yukarıdaki denklem $n \mid (a^2 - b^2)$ olduğunu söyler.

Tanım 5.1 kullanılarak $a^2 \equiv b^2 \pmod n$ elde edilir. □

Şimdi biraz ara vererek yukarıdaki önermenin ne anlama geldiğini düşünelim. Bu önerme, $a \equiv b \pmod{n}$ ise $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$ olduğunu söyler. Bir başka deyişle, a ve b tamsayılarının n ile bölümünden kalan sayılar eşit ise a^2 ve b^2 tamsayılarının n ile bölümlerinden kalan sayılar da eşittir. Örneğin 6 ve 10 tamsayılarının 4 ile bölümünden kalan sayılar eşittir (2). Bunların kareleri olan 36 ve 100 tamsayılarının 4 ile bölümlerinden kalan sayılar da eşittir (0). Bu önerme her a, b ve n için bu gözlemin doğru olacağını garanti eder. Burada verilen örneklerde, önermelerin anlamlarından ziyade bunların nasıl ispatlandığına odaklanacağız. Ana hedefimiz ispatların nasıl yapıldığını öğrenmek olduğu için bu makul bir yaklaşımdır. Ancak bazen ispatladığımız şeyin ne anlama geldiğini düşünmek de yarar vardır.

Önerme. *Herhangi $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ verilsin. Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ise $ac \equiv bc \pmod{n}$ olur.*

İspat. Doğrudan ispat yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki $a \equiv b \pmod{n}$ olsun. Tanım 5.1 kullanılarak $n \mid (a-b)$ yazılabilir. Bölünebilme tanımına göre $a - b = nk$ olacak şekilde bir k tamsayısı vardır. Bu eşitliğin her iki tarafı c ile çarpılarak $ac - bc = nkc$ bulunur. Buna göre $kc \in \mathbb{Z}$ ve $ac - bc = n(kc)$ olduğu için $n \mid (ac - bc)$ elde edilir. Tanım 5.1'den $ac \equiv bc \pmod{n}$ bulunur. □

Bir sonraki örneğimizde $\nmid$ ve $\not\equiv$ sembollerinden kurtulmamız gerekeceği için kullanılacak en iyi yöntem dolaylı ispat yöntemi gibi görünmektedir.

Önerme. *Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $12a \not\equiv 12b \pmod{n}$ ise $n \nmid 12$ olur.*

İspat. (Dolaylı ispat). Kabul edelim ki $n \mid 12$ olsun. Bu durumda $12 = nc$ olacak şekilde bir c tamsayısı vardır. Buradan

$$\begin{aligned} 12 &= nc \\ 12(a-b) &= nc(a-b) \\ 12a - 12b &= n(ca - cb) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre $ca - cb \in \mathbb{Z}$ ve $12a - 12b = n(ca - cb)$ olduğu için $n \mid (12a - 12b)$ bulunur. Bu da $12a \equiv 12b \pmod{n}$ olması anlamına gelir. □

5.3 Matematiksel Yazım

Artık ispatları yazmaya başladığımıza göre, yazı yazma sanatı üzerine birkaç söz etmek için iyi bir noktadayız. Mantıkta ve matematikte doğru ile yanlış arasında kesin bir çizgi vardır. Bunun aksine, iyi ve kötü yazı arasındaki fark bir görüş meselesidir. Ancak yazdıklarınızı daha anlaşılabilir hale getirecek bazı standart kurallar vardır. Şimdi bunlardan bazılarını listeleyelim.

1. **Cümlelere matematiksel bir sembol yerine bir kelime ile başlayın.**[2] Bunun sebebi, cümleler büyük harflerle başlar fakat matematiksel semboller büyük ve küçük harflere karşı duyarlıdır. Örneğin, x ile X sembolleri tamamen farklı anlamlar taşıyabileceği için bunları bir cümlenin başında kullanmak karmaşaya sebep olabilir. Aşağıda (✗ ile işaretlenmiş) kötü kullanım ve (✓ ile işaretlenmiş) iyi kullanım örnekleri verilmiştir:

   $x^2 - x + 2 = 0$ denkleminin iki çözümü vardır. ✗

   $X^2 - x + 2 = 0$ denkleminin iki çözümü vardır. ✗ (Aynı zamanda anlamsızdır.)

   İkinci dereceden $x^2 - x + 2 = 0$ denkleminin iki çözümü vardır. ✓

2. Cümleler matematiksel bir sembol veya ifadeyle bitse bile **her cümleyi nokta ile bitirin.**

   Euler şu formülü ispatlamıştır: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$ ✗

   Euler şu formülü ispatlamıştır: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$ ✓

   Matematiksel önermeler (denklemler vb.) özel semboller içeren cümlelerdir. Bu nedenle doğal noktalama işaretleri kullanılmalıdır.

3. **Matematiksel sembolleri ve ifadeleri kelimeler ile birbirinden ayırın.** Bunun yapılmaması, farklı ifadelerin birleşerek tek bir ifade gibi görünmesine sebep olur. Aşağıdaki örnekleri anlaşılırlık açısından karşılaştırın.

   Böylece $x^2 - 1 = 0$, $x = 1$ veya $x = -1$ bulunur. ✗

   Böylece $x^2 - 1 = 0$ olur ve buradan $x = 1$ veya $x = -1$ bulunur. ✓

   Boş olan $A \cap B$, $A \cup B$ kümesinden farklıdır. ✗

   Boş olan $A \cap B$ kümesi $A \cup B$ kümesinden farklıdır. ✓

4. **Sembollerin yanlış kullanımından kaçının.** Örneğin; $=$, $\leqslant$, $\subseteq$, $\in$ ve benzeri semboller birer kelime değildir. Bunları matematiksel ifadeler için kullanmak uygun olsa da, farklı bağlamda kullanmak yersizdir.

[2] Bu kural, İngilizce için geçerlidir. Türkçe sondan eklemeli bir dil olduğu için bunu uygulamak her zaman mümkün olmayabilir. Bu nedenle bu cümlenin başına "mümkün oldukça" ifadesinin getirilmesi daha doğru olacaktır.

Bu iki küme $=$ olduğu için biri diğerinin altkümesidir. ✗

Bu iki küme eşit olduğu için biri diğerinin altkümesidir. ✓

Boş küme her kümenin bir $\subseteq$'sidir. ✗

Boş küme her kümenin bir altkümesidir. ✓

Dikkat edilirse a tek ve x tek $\Rightarrow x^2$ tek olduğu için a^2 tektir. ✗

Dikkat edilirse a tek ve her tek sayının karesi de tek olduğu için a^2 tektir. ✓

5. **Sembollerin gereksiz kullanımından kaçının.** Matematik zaten onlar olmadan da yeterince karmaşıktır. Çamurlu suyu daha fazla bulandırmanın bir anlamı yoktur.

 Kardinalitesi negatif olan bir X kümesi yoktur. ✗

 Kardinalitesi negatif olan bir küme yoktur. ✓

6. **Birinci çoğul şahıs kullanın.** Matematiksel metinlerde "ben" veya "sen" kelimeleri yerine "biz" kelimesini kullanmak daha yaygındır. Bu sanki okuyucu ve yazar bir konuşma yaparken, yazarın okuyucuya ispatın detayları anlatmasına benzer.

7. **Aktif cümleler kullanın.** Bu sadece bir öneridir ancak aktif cümleler yazınızı daha canlı hale getirir.

 Buradaki $x = 3$ değeri, her iki tarafın 5 ile bölünmesinden elde edilmiştir. ✗

 Her iki tarafı 5 ile bölerek $x = 3$ buluruz. ✓

8. **Kullandığınız her yeni sembolü açıklayın.** Bir ispatı yazarken, tanıttığınız her yeni sembolün anlamını açıklamalısınız. Bunun yapılmaması; belirsizlik, yanlış anlama ve hatalara yol açabilir. Örneğin, bir önceki satırda a ve b tanıtılmış olsun. Buna göre, ispatta kullanılabilecek bir cümlenin olası iki halini göz önüne alalım.

 Buna göre $a \mid b$ olduğu için $b = ac$ olur. ✗

 Buna göre $a \mid b$ olduğu için $b = ac$ olacak şekilde bir c tamsayısı vardır. ✓

9. **"Bu" kelimesinin kullanımına dikkat edin.** "Bu" işaret zamirinin neyi kastettiğinin belli olmaması karışıklığa neden olabilir. Eğer herhangi bir karışıklık olasılığı var ise "bu" kelimesini kullanmaktan kaçınmalısınız. Bunun bir örneği aşağıdadır.

 Burada $X \subseteq Y$ ve $0 < |X|$ olduğu için bu küme boştan farklıdır. ✗

Bu cümledeki "bu" kelimesi X için mi yoksa Y için mi kullanılmıştır? Aslında her ikisi için de kullanılması mantıklıdır fakat bizim hangisini kastettiğimiz belli değildir.

Burada $X \subseteq Y$ ve $0 < |X|$ olduğu için Y kümesi boştan farklıdır. ✓

10. **Çünkü, madem ki, -den dolayı, olduğu için.** Bu bağlaçlar, ispatlar yazılırken, iki önermeyi birleştirmek için yaygın olarak kullanılır. Bunlar, bir önermenin doğru olduğunu ve bunun sonucu olarak diğerinin de doğru olduğunu ifade eder. Aşağıdakilerin hepsi P önermesinin doğru olduğunu (veya doğru kabul edildiğini) ve bunun sonucunda Q önermesinin de doğru olduğu anlamına gelir.

   Q çünkü P Madem ki P, Q P'den dolayı Q P olduğu için Q

   Bu yapılar anlam bakımından *"Eğer P ise Q."* önermesinden farklıdır çünkü bunlar P önermesinin Q önermesini gerektirmesine **ek** olarak P'nin doğru olduğunu da söyler. Bunlar dikkatli bir şekilde kullanılmalıdır. Burada P ve Q iki önermedir **ve** gerçekten de Q önermesi P'den dolayı doğrudur.

   $x \in \mathbb{N}$, böylece $\mathbb{Z}$ ✗

   $x \in \mathbb{N}$, böylece $x \in \mathbb{Z}$ ✓

11. **Bu nedenle, buna göre, böylece, bundan dolayı, bunun sonucu olarak.** Bir önerme öncesinde kullanılan bu zarflar bu önermelerin mantıksal olarak önceki cümle veya hükümlerin sonucu olduğunu söyler.

   Bu nedenle $2k + 1$ formundadır. ✗

   Bu nedenle $a = 2k + 1$ formundadır. ✓

12. **Matematiksel metinlerin altın standardı anlaşılırlıktır.** Eğer bir kuralı çiğnemenin yazınızı daha anlaşılır hale getireceğine inanıyorsanız, o kuralı çiğnemekten kaçınmayın.

Matematiksel yazım yeteneğiniz pratik yaptıkça gelişecektir. İyi bir yazma sitili edinmenin en iyi yollarından birisi, başka insanların ispatlarını okumaktan geçer. İşe yarayaları benimseyip yaramayanlardan kaçının.

Alıştırmalar

A. Aşağıdaki önermeleri dolaylı ispat yöntemini kullanarak kanıtlayınız. (Her durumda, doğrudan ispat yönteminin de nasıl kullanılacağını düşünün. Birçok durumda dolaylı ispat yönteminin daha kolay uygulanabilir olduğunu göreceksiniz.)

1. Kabul edelim ki $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer n^2 çift ise n çifttir.
2. Kabul edelim ki $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer n^2 tek ise n tektir.
3. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a^2(b^2 - 2b)$ tek ise a ve b tektir.
4. Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \nmid bc$ ise $a \nmid b$ olur.
5. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $x^2 + 5x < 0$ ise $x < 0$ olur.
6. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $x^3 - x > 0$ ise $x > -1$ olur.
7. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer ab ve $a + b$ çift ise a ve b çifttir.
8. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x - 4 \geqslant 0$ ise $x \geqslant 0$ olur.
9. Kabul edelim ki $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $3 \nmid n^2$ ise $3 \nmid n$ olur.
10. Kabul edelim ki $x, y, z \in \mathbb{Z}$ ve $x \neq 0$ olsun. Eğer $x \nmid yz$ ise $x \nmid y$ ve $x \nmid z$ olur.
11. Kabul edelim ki $x, y \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $x^2(y + 3)$ çift ise x çifttir veya y tektir.
12. Kabul edelim ki $a \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $4 \nmid a^2$ ise a tektir.
13. Kabul edelim ki $a \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $x^5 + 7x^3 + 5x \geqslant x^4 + x^2 + 8$ ise $x \geqslant 0$ olur.

B. Aşağıdaki önermeleri doğrudan ispat veya dolaylı ispat yöntemlerinden birisini kullanarak kanıtlayınız. Bunlardan biri bazen diğerine göre çok daha kolay uygulanabilirdir.

14. Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ve a ile b aynı pariteli ise $3a + 7$ ve $7b - 4$ karşıt paritelidir.
15. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $x^3 - 1$ çift ise x tektir.
16. Kabul edelim ki $x, y \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $x + y$ çift ise x ile y aynı pariteye sahiptir.
17. Eğer n tek ise $8 \mid (n^2 - 1)$ olur.
18. Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $(a + b)^3 \equiv a^3 + b^3 \pmod{n}$ olur.
19. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ve $a \equiv c \pmod{n}$ ise $c \equiv b \pmod{n}$ olur.
20. Eğer $a \in \mathbb{Z}$ ve $a \equiv 1 \pmod{5}$ ise $a^2 \equiv 1 \pmod{n}$ olur.
21. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ise $a^3 \equiv b^3 \pmod{n}$ olur.
22. Bir $a \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ verilsin. Eğer a tamsayısının n ile bölümünden kalan r ise $a \equiv r \pmod{n}$ olur.
23. Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ise $ca \equiv cb \pmod{n}$ olur.
24. Eğer $a \equiv b \pmod{n}$ ve $c \equiv d \pmod{n}$ ise $ac \equiv bd \pmod{n}$ olur.
25. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ve $2^n - 1$ asal ise n asaldır.
26. Eğer $k \in \mathbb{N}$ ve $n = 2^k - 1$ ise Pascal üçgeninin $n-$yinci satırındaki her bileşen tektir.

27. Eğer $a \equiv 0 \pmod 4$ veya $a \equiv 1 \pmod 4$ ise $\binom{a}{2}$ çifttir.
28. Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ise $4 \nmid (n^2 - 3)$ olur.
29. Eğer a ve b tamsayıları aynı anda sıfır değil ise $\text{ebob}(a, b) = \text{ebob}(a - b, b)$ olur.
30. Eğer $a \equiv b \pmod n$ ise $\text{ebob}(a, n) = \text{ebob}(b, n)$ olur.
31. Kabul edelim ki a ve b tamsayılarına bölme algoritması uygulanarak $a = qb + r$ elde edilsin. Bu durumda $\text{ebob}(a, b) = \text{ebob}(r, b)$ olur.

Bölüm 6

Olmayana Ergi

Şimdi **olmayana ergi** ya da **çelişki ile ispat yöntemi** olarak adlandırılan üçüncü bir ispat yöntemini inceleyeceğiz. Bu yöntem sadece koşullu önerme ispatlarıyla sınırlı değildir, herhangi çeşit bir önermenin ispatında kullanılabilir. Buradaki temel fikir, kanıtlanmak istenilen önermenin *yanlış* olduğunu kabul edip, bunun bir çelişkiye yol açtığını göstermektir. Buna göre, yapılan varsayımın yanlış olduğu sonucuna varacağımız için, önerme doğru olmak zorundadır. Örnek olarak aşağıdaki önermeyi ve bunun ispatını göz önüne alalım.

Önerme. *Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ise $a^2 - 4b \neq 2$ olur.*

İspat. Kabul edelim ki bu önerme yanlış olsun.

- Bu koşullu önermenin yanlış olması, $a^2 - 4b \neq 2$ ifadesini yanlış yapacak a ve b tamsayılarının var olması anlamına gelir.
- Bir başka deyişle $\boxed{a^2 - 4b = 2}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ vardır.
- Bu denklemden $a^2 = 4b + 2 = 2(2b + 1)$ yazabileceğimiz için a^2 çifttir.
- Dikkat edilirse a^2 çift olduğu için a çifttir; böylece $a = 2c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır.
- Kutu içerisindeki denklemde $a = 2c$ yazarak $(2c)^2 - 4b = 2$ yani $4c^2 - 4b = 2$ buluruz.
- Bu denklemin her iki tarafını 2 ile bölerek $2c^2 - 2b = 1$ elde ediliriz.
- Burada $1 = 2(c^2 - b)$ ve $c^2 - b \in \mathbb{Z}$ olduğu için 1 çifttir.
- Bildiğimiz üzere 1 çift **değildir**, o halde ispatta bir şeyler yanlış gitmiştir.
- Fakat ispatın ilk cümlesinden sonraki bütün satırlar mantıksal olarak doğrudur. Bu nedenle ilk cümle yanlış olmalıdır. Bir başka deyişle, önermenin yanlış olduğunu kabul etmek yanlıştır.

Bu nedenle önerme doğru olmalıdır. $\square$

Sonuca bu şekilde ulaşma konusunda biraz şüphe duyabilirsiniz fakat bir sonraki bölümde burada yaptığımız işin mantıksal olarak doğru olduğunu göreceğiz. Şimdilik, ispatın sonunda ulaştığımız 1 çifttir sonucunun bu sayının tek olduğunu bilmemizle çelişmesinin farkında olalım yeter. Aslında burada $C \wedge \sim C$ formundaki (1 tektir) $\wedge$ (1 çifttir) önermesini elde ettik. Dikkat edilirse C önermesi ister doğru ister yanlış olsun, $C \wedge \sim C$ önermesi daima yanlıştır. Bunun gibi doğru olamayacak bir önermeye **çelişki** denir. Çelişki, bu ispat yönteminde önemli bir rol oynar.

6.1 Önermelerin Olmayana Ergi Yöntemiyle İspatı

Şimdi, önceki sayfada yapılan ispatın mantıksal olarak neden geçerli olduğunu görelim. Bahsedilen ispatta $P : (a, b \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (a^2 - 4b \neq 2)$ önermesinin doğrulanması gerekmekteydi. İspata P önermesini yanlış yani $\sim P$ önermesini doğru kabul ederek başladık ve buradan $C \wedge \sim C$ sonucuna vardık. Başka bir deyişle, $\sim P$ önermesinin doğru olmasının $C \wedge \sim C$ önermesinin doğru olmasını gerektirdiği gösterdik. Bu ise $(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$ *koşullu* önermesinin doğru olması anlamına gelir. Yapılan işin P'yi ispatlamakla aynı olduğunu görmek için $(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$ önermesinin aşağıda verilen doğruluk tablosuna bakalım. Dikkat edilirse P ile $(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$ önermelerinin sütunları aynıdır. Buna göre P ile $(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$ önermeleri mantıksal olarak denktir.

P	C	$\sim P$	$C \wedge \sim C$	$(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$
D	D	Y	Y	**D**
D	Y	Y	Y	**D**
Y	D	D	Y	**Y**
Y	Y	D	Y	**Y**

Bu nedenle, bir P önermesini ispatlamak için $(\sim P) \Rightarrow (C \wedge \sim C)$ koşullu önermesini ispatlamak yeterlidir. Bu iş, doğrudan ispat yöntemiyle şu şekilde yapılabilir: $\sim P$ kabul edilir ve $C \wedge \sim C$ sonucuna varılır. Yöntemin ana hatları şu şekildedir:

Özet: Olmayana Ergi ile İspat Yöntemi

Önerme. P.

İspat. Kabul edelim ki $\sim P$ olsun.

$\vdots$

Bu nedenle $C \wedge \sim C$ olur. □

Bu yöntemin tedirgin edici tarafı, ispatın başlangıcında C önermesinin ne olacağının bilinmiyor olmasıdır. Bu nedenle ispat için karalama yapılırken, $\sim P$ doğru kabul edilmeli ve bir C *ile* bunun değili olan $\sim C$ önermeleri elde edilene kadar yeni önermeler türetilmelidir.

Eğer bu yöntem kafanızı karıştırdıysa, buna şu yönden bakabilirsiniz. İspatın ilk satırında $\sim P$ önermesinin doğru yani P önermesinin *yanlış* olduğunu kabul edelim. Eğer P gerçekten doğruysa, bu durum P'nin yanlış olduğu varsayımı ile çelişecektir. Fakat P ispatlanamadığı için bu çelişki çok açık değildir. Bu nedenle mantık ve muhakeme çerçevesinde, çok belirgin olmayan $\sim P$ çelişkisi açıkça belirgin olan $C \wedge \sim C$ çelişkisine dönüştürülür.

Olmayana ergi ile ispat düşüncesi oldukça eski bir yöntemdir. Bunun kökleri, belirli sayıların irrasyonel olduğunu göstermek için bu yöntemi kullanan Pisagorculara kadar uzanır. Bir sonraki örneğimiz $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu kanıtlamak için onların kullandığı mantığı takip eder. Hatırlanacağı üzere iki tamsayının oranı olarak ifade edilebilen bir sayıya rasyonel sayı denir. İki tamsayının oranı şeklinde yazılamayan bir sayı ise irrasyonel sayı olarak adlandırılır. Bu sayılar tam olarak şu şekilde tanımlanır.

Tanım 6.1. *Eğer $x = \frac{a}{b}$ olacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ var ise x reel sayısı* ***rasyoneldir****. Rasyonel olmayan yani her $a, b \in \mathbb{Z}$ için $x \neq \frac{a}{b}$ şartını sağlayan sayı* ***irrasyoneldir****.*

Artık $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu ispatlamak için olmayana ergi yöntemini kullanmaya hazırız. Bu yöntemin özetinde belirtildiği üzere, ispatın ilk satırı "Kabul edelim ki $\sqrt{2}$ irrasyoneldir ifadesi doğru olmasın." olmalıdır. Ayrıca (zorunlu olmamakla birlikte) olmayana ergi yöntemini kullandığımızı okuyucuya bildirmek faydalı olacaktır. Bunu yapmanın standart bir yolu, ispatın ilk satırında *"İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $\sqrt{2}$ irrasyoneldir ifadesi doğru olmasın."* cümlelerini kullanmaktır.

Önerme. $\sqrt{2}$ *irrasyoneldir.*

İspat. İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $\sqrt{2}$ irrasyoneldir ifadesi doğru olmasın. Bu durumda $\sqrt{2}$ rasyoneldir ve

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \tag{6.1}$$

olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır. Buradaki kesir en sade halinde olsun. Buna göre a ile b aynı anda çift olamaz. (Eğer her ikisi de çift olsaydı, pay ve paydaki 2 çarpanları sadeleştirilebilir olurdu.) Eşitlik 6.1'de her iki tarafın karesi alınarak $2 = \frac{a^2}{b^2}$ ve buradan da

$$a^2 = 2b^2 \tag{6.2}$$

elde edilir. Daha önce ispatladığımız üzere a^2 çift ise a çifttir (Alıştırma 1, sayfa 130). Buna göre, a ve b aynı anda çift olmadığı için b **tek** olmalıdır. Şimdi, a çift olduğu için $a = 2c$ olacak şekilde bir c tamsayısı vardır. Bu, Eşitlik 6.2'de yerine yazılarak $(2c)^2 = 2b^2$ yani $4c^2 = 2b^2$ bulunur. Böylece $b^2 = 2c^2$ elde edilir. Bu sonuç b^2 ve dolayısıyla da b tamsayılarının çift olması anlamına gelir. Ancak daha önce b tamsayısının tek olduğu sonucuna varmıştık. Böylece, b çifttir **ve** b tektir çelişkisi elde etmiş olduk. $\square$

Olmayana ergi yönteminin gücünün farkına varmak için $\sqrt{2}$ sayısınının irrasyonel olduğunu onsuz ispatlamaya çalıştığımızı düşünelim. İspata nereden başlamalıyız? Başlangıç varsayımları ne olmalıdır? Bu soruların net cevapları yoktur. Olmayana ergi yöntemi bize bir başlangıç noktası sunar: $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olduğunu varsayıp oradan işe başlarız.

Yukarıdaki ispatta $C \wedge \sim C$ formundaki (b çifttir) $\wedge \sim$ (b çifttir) çelişkisini elde ettik. Genel olarak elde edeceğiniz çelişkinin ille de bu formda olması gerekmez. Yanlış olduğu açıkça belirgin olan herhangi bir ifade elde etmek yeterlidir. Örneğin, mantık çerçevesinde ulaşıldığı sürece $2 \neq 2$ veya $4 \mid 2$ sonuçları yeterince iyi çelişkidir.

En azından Öklid'e kadar uzanan bir başka antik örnek şudur:

Önerme. *Sonsuz sayıda asal sayı vardır.*

İspat. İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki sadece sonlu sayıda asal sayı var olsun. Bu durumda $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ vb. şekilde devam ederek bütün asal sayıları $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ olarak listeleyebiliriz. Buradaki p_n sayısı $n-$yinci sıradadır ve en büyük asal sayıdır. Şimdi bütün asal sayıların çarpımına 1 eklenmesiyle elde edilen $a = (p_1 p_2 p_3 \cdots p_n) + 1$ sayısını ele alalım. Dikkat edilirse 1'den büyük olan her doğal sayının en az bir asal böleni vardır. Bu, n tane asal sayı arasında yer alan en az bir p_k için $p_k \mid a$ olması anlamına gelir. Bu nedenle $a = cp_k$ yani

$$(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_k p_{k+1} \cdots p_n) + 1 = cp_k$$

olacak şekilde bir c tamsayısı vardır. Bu eşitliğin her iki tarafı p_k ile bölünerek

$$(p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_{k+1} \cdots p_n) + \frac{1}{p_k} = c$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{p_k} = c - (p_1 p_2 p_3 \cdots p_{k-1} p_{k+1} \cdots p_n)$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki ifade bir tamsayıdır ancak sol tarafındaki ifade bir tamsayı değildir. Bu ise bir çelişkidir. $\square$

Olmayana ergi yöntemi genellikle $\forall x, P(x)$ formundaki önerme ispatlarında daha kullanışlıdır.

Bunun sebebi, ispatın başlangıcındaki $\sim \forall x, P(x)$ varsayımıdır. Bu varsayım, Bölüm 2.10'dan hatırlanacağı üzere $\exists x, \sim P(x)$ ifadesine denktir. Bu ise bize $\sim P(x)$ önermesini doğru yapan özel bir x değeri verir. Genel olarak bu bilgi bir çelişki üretmek için yeterlidir. Şimdi buna bir örnek verelim.

Önerme. *Her* $x \in [0, \pi/2]$ *reel sayısı için* $\sin x + \cos x \geqslant 1$ *olur.*

İspat. İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki verilen ifade doğru olmasın.

- Bu durumda $\sin x + \cos x < 1$ olacak şekilde bir $x \in [0, \pi/2]$ vardır.
- Burada $x \in [0, \pi/2]$ olduğundan ne $\sin x$ ne de $\cos x$ negatif olup $0 \leqslant \sin x + \cos x < 1$ bulunur.
- Buradan $0^2 \leqslant (\sin x + \cos x)^2 < 1^2$ yani $0 \leqslant \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x < 1$ elde edilir.
- Dikkat edilirse $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ olduğu için eşitsizlik $0 \leqslant 1 + 2 \sin x \cos x < 1$ halini alır.
- Buradan $1 + 2 \sin x \cos x < 1$ yazılabilir.
- Bu eşitsizliğin her iki tarafından 1 çıkarılarak $2 \sin x \cos x < 0$ elde edilir.

Son eşitsizlik, ne $\sin x$ ne de $\cos x$ sayılarının negatif olmaması ile çelişir. □

6.2 Koşullu Önermelerin Olmayana Ergi ile İspatı

Önceki iki ünitede özel olarak koşullu önerme ispatlarıyla ilgilendik. Şimdi yine bu önermelerin olmayana ergi ile ispat yöntemini resmiyete dökelim. Bunun için aşağıdaki formda verilen bir önermeyi ispatlamak istediğinizi varsayalım.

Önerme. *Eğer* P *ise* Q*.*

Burada $P \Rightarrow Q$ önermesinin doğru olduğunu kanıtlamamız gerekmektedir. Olmayana ergi yöntemi $\sim(P \Rightarrow Q)$ önermesinin doğru yani $P \Rightarrow Q$ önermesinin yanlış olduğunu varsayarak işe başlar. Ancak bildiğimiz üzere $P \Rightarrow Q$ önermesinin yanlış olması, P doğruyken Q'nun yanlış olması anlamına gelir. Bu nedenle ispatın ilk adımında P ve $\sim Q$ varsayılmalıdır. Bunun özeti aşağıdadır:

Özet: Koşullu Önermelerin Olmayana Ergi Yöntemi ile İspatı

Önerme. *Eğer P ise Q.*

İspat. Kabul edelim ki P ve $\sim Q$ olsun.

$\vdots$

Bu nedenle $C \wedge \sim C$ olur. □

Bu yeni tekniği açıklamak için tanıdık bir sonucu tekrar ele alalım: Eğer a^2 çift ise a çifttir. Yukarıda verilen özete göre ispatın ilk satırı "İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki a^2 çift olsun ve a çift olmasın." olmalıdır.

Önerme. *Bir $a \in \mathbb{Z}$ verilsin. Eğer a^2 çift ise a çifttir.*

İspat. İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki a^2 çift olsun ve a çift olmasın.

- Bu durumda a^2 çifttir ve a tektir.
- Dikkat edilirse, a tek olduğu için $a = 2c + 1$ olacak şekilde bir c tamsayısı vardır.
- Buradan $a^2 = (2c+1)^2 = 4c^2 + 4c + 1 = 2(2c^2 + 2c) + 1$ olacağı için a^2 tektir.
- Buna göre a^2 çifttir ve a^2 tektir.

Bu ise bir çelişkidir. □

Şimdi başka bir örnek inceleyelim:

Önerme. *Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $a \geqslant 2$ ise $a \nmid b$ veya $a \nmid (b+1)$ olmalıdır.*

İspat. İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $a \nmid b$ veya $a \nmid (b+1)$ ifadeleri doğru olmayacak şekilde $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $a \geqslant 2$ var olsun.

- DeMorgan kurallarından $a \mid b$ ve $a \mid (b+1)$ yazılabilir.
- Bölünebilme tanımı, $b = ac$ ve $b + 1 = ad$ olacak şekilde $c, d \in \mathbb{Z}$ var olduğunu söyler.
- İkinci denklemden ilki çıkarılarak $ad - ac = 1$ yani $a(d - c) = 1$ bulunur.
- Dikkat edilirse a pozitif olduğu için $d - c$ pozitif olmalıdır. (Aksi halde $a(d-c)$ negatif olur).
- Böylece $d - c$ pozitif bir tamsayı ve $a(d - c) = 1$ olduğu için $a = 1/(d - c) < 2$ bulunur.

- Buna göre $a \geqslant 2$ ve $a < 2$ elde edilir.

Bu ise bir çelişkidir. □

6.3 Yöntemleri Birleştirmek

Çoğu zaman ve özellikle de karmaşık ispatlarda, birçok ispat yöntemi tek bir ispat içerisinde kullanılabilir. Örneğin $P \Rightarrow Q$ koşullu önermesini ispatlarken, doğrudan ispat yöntemi ile başlayabilir ve Q önermesinin doğru olduğunu göstermek amacıyla P önermesinin doğru olduğunu kabul edebiliriz. Fakat Q'nun doğruluğu başka bir R önermesinin doğru olmasına dayanabilir; böylece Q'nun doğru olmasını P ve R önermeleri birlikte gerektirir. Buna göre bize en uygun görünen ispat yöntemini kullanarak R önermesini kanıtlamamız gerekir. Bu durum "ispat içinde ispata" yol açar. Şimdi aşağıdaki örneği inceleyelim. Buradaki genel yaklaşım doğrudandır; fakat doğrudan ispat içerisinde ayrı bir olmayana ergi ispatı vardır.

Önerme. *Sıfırdan farklı her rasyonel sayı iki tane irrasyonel sayının çarpımı olarak yazılabilir.*

İspat. Bu önerme şu şekilde yeniden yazılabilir: Eğer r sıfırdan farklı bir rasyonel sayı ise r iki tane irrasyonel sayının çarpımıdır. Bunu doğrudan ispat yöntemiyle kanıtlayalım. Kabul edelim ki r sıfırdan farklı bir rasyonel sayı olsun. Bu durumda $r = \frac{a}{b}$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır. Ayrıca r aşağıdaki gibi iki sayının çarpımı olarak yazılabilir:

$$r = \sqrt{2} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Bildiğimiz üzere $\sqrt{2}$ irrasyoneldir. O halde ispatı tamamlamak için $r/\sqrt{2}$ sayısının da irrasyonel olduğunu göstermemiz gerekir.

Bunu olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $r/\sqrt{2}$ rasyonel olsun. Bu,

$$\frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{c}{d}$$

olacak şekilde c ve d tamsayılarının var olması anlamına gelir. Buradan

$$\sqrt{2} = r\frac{d}{c}$$

bulunur. Hatırlanacağı üzere $r = \frac{a}{b}$ olduğu için bunu yukarıdaki eşitlikte yerine yazarak

$$\sqrt{2} = r\frac{d}{c} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{cb}$$

elde ederiz. Bu eşitlik $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olması anlamına gelir. Bu ise bir çelişkidir.

Sonuç olarak $r = \sqrt{2} \cdot r/\sqrt{2}$ ifadesi iki tane irrasyonel sayının çarpımıdır. □

Başka bir ispat-içinde-ispat örneği için bu ünitenin sonunda verilen 5. alıştırmayı çözebilirsiniz (ya da çözümüne bir göz atabilirsiniz). Bu alıştırmada, sizden $\sqrt{3}$ sayısının irrasyonel olduğunu göstermeniz istenmektedir. Bu örnek $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu göstermekten biraz daha karmaşıktır.

6.4 Çeşitli Tavsiyeler

Olmayana ergi güçlü bir ispat yöntemi olmasına rağmen bu yöntemi, doğrudan veya dolaylı ispat yöntemleri kullanılamaz gibi göründüğünde kullanmak en iyisidir. Bunun nedeni olmayana ergi yöntemi, içerisinde gizli bir basit dolaylı ispat barındırıyor olabilir. Bu durumda daha basit olan yaklaşım ile devam etmek en doğrusudur. Aşağıdaki örneği inceleyiniz.

Önerme. *Kabul edelim ki $a \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a^2 - 2a + 7$ çift ise a tektir.*

İspat. Aksine $a^2 + 2a + 7$ çift olsun ve a tek olmasın.

- Bir başka deyişle $a^2 + 2a + 7$ ve a aynı anda çift olsun.
- Bu göre a çift olacağı için $a = 2c$ olacak şekilde bir c tamsayısı vardır.
- Buradan $a^2 + 2a + 7 = (2c)^2 + 2(2c) + 7 = 4c^2 + 4c + 7 = 2(2c^2 + 2c + 3) + 1$ olduğu için $a^2 + 2a + 7$ tektir.
- Böylece $a^2 + 2a + 7$ hem çift hem de tektir.

Bu ise bir çelişkidir. □

Bu ispatta yanlış olan hiçbir şey olmasa da, a tamsayısının tek olmadığını varsayıp $a^2 + 2a + 7$ tamsayısının çift olmadığı sonucuna varılan kısmı göz önüne alalım. Burada dolaylı bir ispat yaklaşımı vardır. Bu nedenle dolaylı ispat yöntemini kullananan aşağıdaki kanıt daha kullanışlıdır.

Önerme. *Kabul edelim ki $a \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a^2 - 2a + 7$ çift ise a tektir.*

İspat. (Dolaylı ispat). Kabul edelim ki a tek olmasın.

- Buna göre a çift olacağı için $a = 2c$ olacak şekilde bir c tamsayısı vardır.
- Buradan $a^2 + 2a + 7 = (2c)^2 + 2(2c) + 7 = 4c^2 + 4c + 7 = 2(2c^2 + 2c + 3) + 1$ olduğu için $a^2 + 2a + 7$ tektir.

O halde $a^2 - 2a + 7$ çift değildir. $\square$

Alıştırmalar

A. Aşağıdaki önermeleri olmayana ergi yöntemini kullanarak ispatlayınız. Her durumda, doğrudan veya dolaylı ispat yöntemlerinin de nasıl kullanılacağını düşünün. (Birçok durumda olmayana ergi yönteminin daha kolay uygulanabilir olduğunu göreceksiniz.)

1. Kabul edelim ki $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer n tek ise n^2 tektir.
2. Kabul edelim ki $n \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer n^2 tek ise n tektir.
3. $\sqrt[3]{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu ispatlayınız.
4. $\sqrt{6}$ sayısının irrasyonel olduğunu ispatlayınız.
5. $\sqrt{3}$ sayısının irrasyonel olduğunu ispatlayınız.
6. Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ise $a^2 - 4b - 2 \neq 0$ olur.
7. Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ise $a^2 - 4b - 3 \neq 0$ olur.
8. Kabul edelim ki $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a^2 + b^2 = c^2$ ise a veya b çifttir.
9. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer a rasyonel ve ab irrasyonel ise b irrasyoneldir.
10. $21a + 30b = 1$ olacak şekilde a ve b tamsayıları yoktur.
11. $18a + 6b = 1$ olacak şekilde a ve b tamsayıları yoktur.
12. Pozitif olan her $x \in \mathbb{Q}$ için $y < x$ olacak şekilde pozitif bir $y \in \mathbb{Q}$ vardır.
13. Her $x \in [\pi/2, \pi]$ için $\sin x - \cos x \geqslant 1$ olur.
14. Eğer A ve B iki küme ise $A \cap (B - A) = \varnothing$ olur.
15. Eğer $b \in \mathbb{Z}$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $b \nmid k$ ise $b = 0$ olur.
16. Eğer a ve b pozitif reel sayılar ise $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ olur.
17. Her $n \in \mathbb{Z}$ için $4 \nmid (n^2 + 2)$ olur.
18. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $4 \mid (a^2 + b^2)$ ise a ve b aynı anda tek olamaz.

B. Aşağıdaki önermeleri Ünite 4, 5 veya 6'da verilen metodlardan herhangi birini kullanarak ispatlayınız.

19. Ardışık her beş tamsayının çarpımı 120 ile bölünebilir. (Örneğin 3, 4, 5, 6 ve 7 tamsayılarının çarpımı $2520 = 120 \cdot 21$ olur.)

20. Eğer x ve y sayılarının her ikiside rasyonel ise $\mathbb{R}^2$ düzelmindeki $P(x, y)$ noktasına bir **rasyonel** nokta denir. Daha açık bir ifadeyle, eğer $P(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ ise P rasyoneldir. Eğer $F(x_0, y_0) = 0$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in \mathbb{Q}$ var ise $F(x, y) = 0$ denkleminin **rasyonel noktası** vardır denir. Örneğin $(x_0, y_0) = (1, 0)$ noktası $x^2 + y^2 - 1 = 0$ eğrisinin bir rasyonel noktasıdır. Buna göre $x^2 + y^2 - 3 = 0$ eğrisinin rasyonel bir noktasının olmadığını gösteriniz.

21. Yukarıdaki 20. alıştırma $x^2 + y^2 - 3 = 0$ eğrisi üzerinde bir rasyonel nokta olmadığını söyler. Bu bilgiyi kullanarak $\sqrt{3}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

22. Alıştırma 20'de verilen $x^2 + y^2 - 3 = 0$ eğrisinin rasyonel noktalarının olmaması neden pozitif ve tek olan her k için $x^2 + y^2 - 3^k = 0$ eğrisinin rasyonel noktalarının olmamasını gerektirir.

23. Yukarıdaki sonucu kullanarak tek ve pozitif her k tamsayısı için $\sqrt{3^k}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

24. $\log_2 3$ sayısı irrasyoneldir.

Kısım III

İspat Üzerine Daha Fazlası

Bölüm 7

Koşulsuz Önermelerin İspatlanması

Son üç ünitede üç tane temel ispat yöntemi verilmiştir. Bunlar doğrudan ispat, dolaylı ispat ve olmayana ergi yöntemleridir. Bu yöntemlerin üçü de *"Eğer P ise Q."* formundaki önermeleri kanıtlamak için kullanılır. Bildiğimiz üzere teorem ve önermelerin büyük bir kısmı ya koşullu formdadır ya da yeniden yazılarak koşullu forma getirilebilir. Bu nedenle buradaki üç ana yöntem oldukça önemlidir. Ancak bazı teorem ve önermeleri koşullu forma dönüştürmek mümkün değildir. Örneğin bazı teoremler *"P ancak ve ancak Q."* formundadır. Bunlar tek koşullu değil, çift koşullu önermelerdir. Bu ünitede, ancak-ve-ancaklı formda verilen teoremleri ispatlama yollarını inceleyeceğiz. Bunların yanı sıra iki tane de farklı teorem tipine bakacağız.

7.1 Ancak ve Ancaklı İspatlar

Bazı önermeler

P ancak ve ancak Q

formundadır. Bölüm 2.4'ten bildiğimiz üzere, bu önerme aşağıdaki önermelerin *her ikisininde* doğru olduğunu bildirir:

Eğer P ise Q.

Eğer Q ise P.

Bu nedenle *"P ancak ve ancak Q."* önermesini kanıtlamak için **iki** tane koşullu önermeyi ispatlamamız gerekir. Yine Bölüm 2.4'ten hatırlanacağı üzere $Q \Rightarrow P$ önermesine $P \Rightarrow Q$ önermesinin *karşıtı* denir. Bunların her ikisi de birer koşullu önermedir ve ispatları doğrudan ispat, dolaylı ispat veya olmayana ergi yöntemlerinden biri kullanılarak yapılabilir. Bu metodun ana hatları şu şekildedir.

Özet: Ancak-ve-Ancaklı İspatlar

Önerme. *P ancak ve ancak Q.*

İspat.
(Doğrudan ispat, dolaylı ispat veya olmayan ergi yöntemlerinden biriyle $P \Rightarrow Q$ kanıtlanır.)
(Doğrudan ispat, dolaylı ispat veya olmayan ergi yöntemlerinden biriyle $Q \Rightarrow P$ kanıtlanır.)
□

Çok basit bir örnekle başlayalım. Sadece metodun ana hatlarını göstermek açısından, doğru olduğunu zaten bildiğimiz "n tektir ancak ve ancak n^2 tektir" önermesini ispatlayalım. Bunun için (n tek) $\Rightarrow$ (n^2 tek) önermesini doğrudan, (n^2 tek) $\Rightarrow$ (n tek) önermesini dolaylı yoldan ispatlayalım.

Önerme. *Bir n tamsayısı tektir ancak ve ancak n^2 tektir.*

İspat. İlk önce n tek sayı ise n^2 tamsayısının tek olması gerektiğini gösterelim. Kabul edelim ki n tek olsun. Tek sayı tanımına göre $n = 2a + 1$ olacak şekilde bir a tamsayısı vardır. Buradan $n^2 = (2a + 1)^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1$ bulunur. Bu ifadeye göre n^2 bir tamsayının iki katından bir fazladır yani n^2 tektir.

Karşıt olarak, n^2 tek sayı ise n tamsayısının tek olması gerektiğini gösterelim. Bunu dolaylı ispat yöntemiyle yapalım. Kabul edelimki n tek olmasın. Bu durumda n çifttir ve (çift sayı tanımından) $n = 2a$ olacak şekilde bir a tamsayısı vardır. Buradan $n^2 = (2a)^2 = 2(2a^2)$ olur. Buna göre n^2 bir tamsayının iki katıdır yani çifttir. Dolayısı ile n^2 tek değildir. O halde n tek değilse n^2 tek değildir. Bu, n^2 tek ise n tektir önermesinin dolaylı ispatıdır. □

"P ancak ve ancak Q." önermesinin ispatında, $Q \Rightarrow P$ önermesin ispatına yeni bir paragrafta başlanmalıdır. Bu önerme, $P \Rightarrow Q$ önermesinin karşıtı olduğu için okuyucuya ispatın ilk kısmının bittiğini ve ikinci kısmına başladığımızı belirtmek açısından (yukarıda yaptığımız gibi) bu paragrafa "Karşıt olarak" ifadesiyle başlayabiliriz. Aynı şekilde, bu yeni paragrafta okuyucuya tam olarak neyin ispatlandığını hatırlatmak iyi bir fikirdir.

Bir sonraki örneğin ispatının her iki kısmında da doğrudan ispat yöntemi kullanılacaktır.

Önerme. *Kabul edelimki a ve b iki tamsayı olsun. Buna göre, $a \equiv b \pmod 6$ ancak ve ancak $a \equiv b \pmod 2$ ve $a \equiv b \pmod 3$.*

İspat. İlk önce $a \equiv b \pmod 6$ ise $a \equiv b \pmod 2$ ve $a \equiv b \pmod 3$ olduğunu gösterelim. Kabul edelimki $a \equiv b \pmod 6$ olsun. Bu durum $6 \mid (a-b)$ anlamına geldiği için

$$a - b = 6n$$

olacak şekilde bir n tamsayısı vardır. Bu eşitliği ilk önce $a-b = 2(3n)$ şeklinde yazarak $2 \mid (a-b)$ ve böylece $a \equiv b \pmod 2$, daha sonra $a-b = 3(2n)$ şeklinde yazarak $3 \mid (a-b)$ ve böylece $a \equiv b \pmod 3$ elde ederiz.

Karşıt olarak, $a \equiv b \pmod 2$ ve $a \equiv b \pmod 3$ olduğunu kabul edelim. Öncelikle, $a \equiv b \pmod 2$ olduğu için $2 \mid (a-b)$ olur. Buna göre $a-b = 2k$ olacak şekilde bir k tamsayısı vardır. O halde $a-b$ çifttir. Benzer şekilde $a \equiv b \pmod 3$ olduğu için $3 \mid (a-b)$ bulunur. Bu durumda

$$a - b = 3l$$

olacak şekilde bir l tamsayısı vardır. Ancak $a-b$ çift olduğu için l çift olmalıdır, aksi halde $a-b = 3l$ tek olur (çünkü böyle bir durumda $a-b$ iki tane tek sayının çarpımıdır). Buna göre $l = 2m$ olcak şekilde bir m tamsayısı vardır. Buradan $a - b = 3l = 3 \cdot 2m = 6m$ bulunur. Bu ise $6 \mid (a-b)$ yani $a \equiv b \pmod 6$ anlamına gelir. $\square$

Ancak-ve-ancaklı ispatlar sadece bildiğimiz metodların kombinasyonudur. Bu nedenle, bu bölümde başka örneklere yer vermeyeceğiz. Bununla birlikte, becerilerinizi ünite sonuda verilen bazı alıştırmalar üzerinde denemeniz son derece önemlidir.

7.2 Denk Önermeler

Diğer derslerde bazen listelenerek verilen önermelerin *"denk"* olduklarını iddia eden ancak ne tek koşullu ne de çift koşullu formda olan bir teorem türüne rastlayabilirsiniz. Lineer cebir ders kitaplarında gördüğünüz (ya da göreceğiniz) bu türdeki bir teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem. *A matrisi $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:*

(a) *A matrisi tersinirdir.*

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *denkleminin her* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *için bir tek çözümü vardır.*

(c) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *denkleminin sadece aşikar çözümü vardır.*

(d) *A matrisinin indirgenmiş eşelon formu* I_n *birim matrisidir.*

(e) $\det A \neq 0$.

(f) *A matrisinin bütün özdeğerleri sıfırdan farklıdır.*

Bir listedeki önermelerin "denk" olduğunu iddia eden teorem aslında önermelerinin ya hepsinin doğru ya da hepsinin yanlış olduğunu iddia eder. Buna göre $n \times n$ tipinde bir matris verildiğinde, yukarıdaki teorem bize (a)'dan (f)'ye kadar olan önermelerin ya hepsinin doğru ya da hepsinin yanlış olduğunu ifade eder. Örneğin $\det A \neq 0$ olduğu biliniyorsa yukarıdaki teorem (e) önermesine ek olarak (a)'dan (f)'ye bütün önermelerin doğru olduğunu garanti eder. Diğer taraftan, $\det A = 0$ ise teorem (a)'dan (f)'ye bütün önermelerin yanlış olduğunu söyler. Böylece yukarıdaki teorem A matrisi hakkında bildiklerimizi altı katına çıkarır ve açıkçası bu çok yararlıdır.

Böyle bir teoremi ispatlamak için hangi metodu kullanabiliriz? Yukarıdaki teorem bir anlamda ancak-ve-ancaklı bir teoremdir. Hatırlanacağı üzere $P \Leftrightarrow Q$ formundaki ancak-ve-ancaklı bir teorem, P ve Q'nun aynı anda doğru ya da aynı anda yanlış olduğunu söyler. Bir başka deyişle P ve Q denktir. $P \Leftrightarrow Q$ önermesini kanıtlamak için ilk önce $P \Rightarrow Q$ daha sonra $Q \Rightarrow P$ ispatlanarak bir anlamda P'den Q'ya giden ve daha sonra P'ye geri dönen bir "döngü" oluşturulur. Buna göre, A matrisi için yukarıda verilen teoremi ispatlamanın bir yolu $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (d)$, $(d) \Rightarrow (e)$, $(e) \Rightarrow (f)$ ve $(f) \Rightarrow (a)$ koşullu önermelerini sırayla ispatlamaktır. Bu ispat yöntemi aşağıdaki gibi modellenebilir:

$$\begin{array}{ccccc} (a) & \Longrightarrow & (b) & \Longrightarrow & (c) \\ \Uparrow & & & & \Downarrow \\ (f) & \Longleftarrow & (e) & \Longleftarrow & (d) \end{array}$$

Dikkat edilirse, buradaki altı gerektirmenin hepsi ispatlandığında, gerçektende (a)'dan (f)'ye bütün önermelerin hepsi ya doğru ya da yanlış olur. Bunlardan bir tanesi doğruysa, dairesel zincir bütün önermelerin doğru olmasını gerekli kılar. Diğer taraftan, bunlardan biri (örneğin (c)) yanlış ise $(b) \Rightarrow (c)$ gerektirmesinin doğru olması (b)'yi yanlış kılar. Bunun, $(a) \Rightarrow (b)$ gerektirmesinin doğru olması ile birleşimi (a)'yı yanlış kılar ve bu şekilde dairesel döngü üzerinde saatin tersi yönde devam edilir.

Böylece n tane önermenin denk olduğunu kanıtlamak için, bir önermenin başka birini gerektirdiğini ifade eden ve dairesel formda bulunan n tane koşullu önermeyi ispatlamak yeterlidir. Ancak dairesel form ille de gerekli değildir. Örneğin, aşağıdaki şemalardan herhangi biri de aynı işi yapar:

$$\begin{array}{ccccc} (a) & \Longrightarrow & (b) & \Longleftrightarrow & (c) \\ \Uparrow & & \Downarrow & & \\ (f) & \Longleftarrow & (e) & \Longleftrightarrow & (d) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} (a) & \Longleftrightarrow & (b) & \Longleftrightarrow & (c) \\ & & \Updownarrow & & \\ (f) & \Longleftrightarrow & (e) & \Longleftrightarrow & (d) \end{array}$$

Dikkat edilirse ispatlanacak koşullu önerme sayısı dairesel şemalarda en azdır. Kullanılan şema ne olursa olsun, koşullu önermelerin her biri doğrudan ispat, dolaylı ispat veya olmayana ergi yöntemlerinden biri kullanılarak yapılabilir.

Bu tür ispatlara bu kitapta yer verilmeyecek olsa da, diğer derslerde bunlarla karşılaşacağınızdan emin olabilirsiniz.

7.3 Varlık İspatları; Varlık ve Teklik İspatları

Bu noktaya kadar, sadece tek koşullu veya iki ya da daha fazla koşullu formda yazılan önermelerle ilgilendik. Bu önermeler genellikle $P(x) \Rightarrow Q(x)$ formundadır. (Buradaki değişken sayısı birden fazla olabilir.) Bunlar, Bölüm 2.8'den hatırlanacağı üzere, evrensel olarak nicelenmiş $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$ formundaki önermeler olarak da yorumlanabilir.

Bu nedenle koşullu önermeler evrensel olarak nicelenmiş önermelerdir ve biz bunları −doğrudan ispat, dolaylı ispat veya olmayana ergi yöntemlerinden biriyle− ispatlarken aslında evrensel olarak nicelenmiş bir önerme ispatlarız.

Ancak, varlıksal olarak nicelenmiş bir önermeyi nasıl ispatlarız? Bir başka ifadeyle

$$\exists\, x, R(x)$$

formunda verilen bir önermeyi ispatlamak için nasıl bir yöntem takip edebiliriz? Bu önerme $R(x)$ önermesini doğrulayan özel bir x niceliğinin var olduğunu iddia eder. Bu nedenle $\exists\, x, R(x)$ önermesini ispatlamak için yapmamız gereken tek şey, bu önermeyi doğrulayan x örneğini ortaya koymaktır.

Önerme ve teoremlerin büyük çoğunluğu koşullu (ya da çift koşullu) formda olsa da, bunların az bir kısmı $\exists\, x, R(x)$ formundadır. Bu formdaki önermelere **varlık önermeleri** ve teoremlere **varlık teoremleri** denir. Bir varlık teoremini kanıtlamak için yapılması gereken tek şey, onu doğrulayan bir örnek vermektir. Genelde bu iş oldukça basittir. (Ama her zaman değil!) Şimdi bazı örnekleri inceleyelim:

Önerme. *Çift olan bir asal sayı vardır.*

İspat. Gözlemleneceği üzere 2 çift ve asal bir sayıdır. □

Kuşkusuz bu önerme çok basit oldu. Şimdi biraz daha zor olana bakalım.

Önerme. *İki kübün toplamı olarak iki farklı biçimde yazılabilen bir tamsayı vardır.*

İspat. 1729 sayısını ele alalım. Dikkat edilirse $1^3 + 12^3 = 1729$ ve $9^3 + 10^3 = 1729$ olduğu görülebilir. Dolayısıyla 1729 sayısı, iki kübün toplamı olarak iki farklı şekilde yazılabilir. □

Varlık önermelerinin ispatlarında bazen verilen örneğin gerçekten de işe yaradığını göstermek gerekir. Örneğin yukarıdaki ispatta 1729 sayısının, iki tam küpün toplamı olarak iki farklı şekilde yazılabileceği sadece iddia edilip bunun *nasıl* yapılacağını gösterilmeseydi, ispat eksik kalırdı.

Uyarı. *Bir örnek, bir varlık önermesini ispatlamak için yeterlidir ancak koşullu bir önermeyi ispatlamak için yeterli değildir.*

Genel olarak varlık önermeleri, koşullu önermeler içerisine gömülüdür. Bunu görmek için aşağıdaki önermeyi göz önüne alalım. (108. sayfadaki ebob tanımını hatırlayın).

Eğer $a, b \in \mathbb{N}$ ise $\text{ebob}(a, b) = ak + bl$ olacak şekilde k ve l tamsayıları vardır.

Bu önerme, aşağıdaki forma sahip bir koşullu önermedir:

$$a, b \in \mathbb{N} \implies \exists\, k, l \in \mathbb{Z}, \text{ebob}(a, b) = ak + bl.$$

Doğrudan ispat yöntemiyle bu önermeyi kanıtlamak için, ilk önce $a, b \in \mathbb{N}$ olduğunu kabul ederek $\exists k, l \in \mathbb{Z}$, $\text{ebob}(a, b) = ak + bl$ varlık önermesini ispatlamamız gerekir. Bir başka deyişle $\text{ebob}(a, b) = ak + bl$ olacak şekilde (a ile b'ye bağlı olan) k ve l tamsayılarını üretmemiz gerekir. Şimdi bu planı uygulayalım. (Bu önerme, ileride birçok defa kullanacağımız temel bir önermedir. Bu nedenle buna bir numara verelim).

Önerme 7.1. *Eğer $a, b \in \mathbb{N}$ ise $\text{ebob}(a, b) = ak + bl$ olacak şekilde k ve l tamsayıları vardır.*

İspat. (Doğrudan ispat). Kabul edelimki $a, b \in \mathbb{N}$ olsun. $A = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$ kümesini göz önüne alalım. Pozitif ve negatif tamsayıların yanı sıra, 0 bu kümeye dahildir. (Sebep: $y = 0$ olsun ve x değişkeni tamsayılar kümesi üzerinde değişsin. Buna göre $ax + by = ax$ sayısı a'nın, sıfır, pozitif ve negatif bütün katlarını içerir.) A kümesinin en küçük pozitif elemanı d olsun. Bu durumda $d \in A$ olduğu için $d = ak + bl$ olacak şekilde özel k ve l tamsayıları vardır.

İspatı tamamlamak için $d = \text{ebob}(a,b)$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için ilk önce d tamsayısının a ve b sayılarını böldüğünü, daha sonra da ortak bölenlerin *en büyüğü* olduğunu gösterelim.

Şimdi, $d \mid a$ olduğunu görmek için Bölme algoritmasını (sayfa 46) kullanarak $a = qd + r$ yazabiliriz. Buradaki q ve r tamsayıları $0 \leqslant r < d$ şartını sağlar. Buna göre, $a = qd + r$ denkleminden

$$\begin{aligned} r &= a - qd \\ &= a - q(ak + bl) \\ &= a(1 - qk) + b(-ql) \end{aligned}$$

bulunur. Dikkat edilirse r tamsayısı $r = ax + by$ formunda olduğu için A kümesine aittir. Ancak, A kümesinin en küçük pozitif elemanı d olduğu için $0 \leqslant r < d$ koşulundan dolayı r pozitif olamaz. Buradan $r = 0$ bulunur. Buna göre $a = qd + r$ denklemi $a = qd$ haline gelir ve böylece $d \mid a$ bulunur. Bu argüman $b = qd + r$ denklemi için tekrarlanarak $d \mid b$ bulunur. O halde d sayısı a ve b'nin bir ortak bölenidir. Geriye, d tamsayısının ortak bölenlerin en büyüğü olduğunu göstermek kalır.

Dikkat edilirse $\text{ebob}(a,b)$ sayısı a ve b'yi böler yani $a = \text{ebob}(a,b) \cdot m$ ve $b = \text{ebob}(a,b) \cdot n$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $d = ak + bl = \text{ebob}(a,b) \cdot mk + \text{ebob}(a,b) \cdot nl = \text{ebob}(a,b)(mk + nl)$ bulunur. Buna göre d sayısı $\text{ebob}(a,b)$ sayısının bir katıdır ve $d \geqslant \text{ebob}(a,b)$ yazılabilir. Ancak, d sayısı a ile b'nin en büyük ortak böleni olan $\text{ebob}(a,b)$ sayısından daha büyük bir ortak bölen olamaz. Sonuç olarak $d = \text{ebob}(a,b)$ olmalıdır. □

Bu bölümü *teklik ispatları* olarak adlandırılan ispatlardan bahsederek tamamlayalım. Bazı varlık önermeleri *"Bir ve sadece bir tek x vardır öyle ki $P(x)$"* formundadır. Bunlar, $P(x)$ önermesini doğrulayan bir ve sadece bir tane x örneğinin varolduğunu iddia eder. Bunları kanıtlamak için $P(d)$ doğru olacak biçimde bir $x = d$ örneğini üretmeniz **ve** bunu sağlayan tek örneğin d olduğunu göstermeniz gerekir. Bir sonraki önermede bu yapılacaktır. Bu örnek, esas itibariyle $\{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin tam olarak $\text{ebob}(a,b)$ sayısının bütün katlarından oluştuğunu iddia etmektedir.

Önerme. *Kabul edelimki $a, b \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda bir ve sadece bir tek $d \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki: Bir m tamsayısı d sayısının katıdır ancak ve ancak $m = ax + by$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır.*

İspat. Kabul edelimki $a, b \in \mathbb{N}$ ve $d = \text{ebob}(a,b)$ olsun. İlk önce, bir m tamsayısı d sayısının katıdır ancak ve ancak $m = ax + by$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır, önermesini ispatlayalım. Şimdi, $m = dn$ sayısı d doğal sayısının bir katı olsun. Önceki sayfada verilen Önerme 7.1'den dolayı $d = ak + bl$ olacak şekilde $k, l \in \mathbb{Z}$ vardır. Buna göre $m = dn = (ak + bl)n = a(kn) + b(ln)$ olur ve böylece $x = kn$ ve $y = ln$ seçilerek $m = ax + by$ elde edilir.

Karşıt olarak $m = ax + by$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ var olsun. Dikkat edilirse $d = \text{ebob}(a,b)$ sayısı a ve b sayılarını böler. Buna göre $a = dc$ ve $b = de$ olacak şekilde $c, e \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $m = ax + by = dcx + dey = d(cx + ey)$ bulunur. Sonuç olarak $d \mid m$ elde edilir.

Böylece, bir m tamsayısı d sayısının katıdır ancak ve ancak $m = ax + by$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır, önermesini sağlayan bir d sayısının var olduğunu gösterdik. Geriye, d sayısının *bir ve sadece bir tek* olduğunu göstermek kaldı. Bunun için d ile aynı özelliğe sahip yani aşağıdaki önermeyi sağlayan, başka bir d' sayısının var oldugunu kabul edelim:

$$m \text{ tamsayısı } d' \text{ sayısının bir katıdır} \iff m = ax + by \text{ olacak şekilde } x, y \in \mathbb{Z} \text{ vardır.} \tag{7.1}$$

Buna göre $d = d'$ yani bahsedilen özelliği sağlayan d sayısının *bir ve sadece bir tek* olduğunu gösterelim. Eşitlik 7.1 gereğince, $m = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a$ tamsayısı d' sayısının bir katıdır. Benzer şekilde $m = a \cdot 0 + b \cdot 1 = b$ tamsayısı d' sayısının bir katıdır. O halde a ile b tamsayıları d' sayısının birer katıdır ve böylece d' bu sayıların bir ortak bölenidir. Buradan

$$d' \leqslant \text{ebob}(a, b) = d$$

elde edilir. Yine 7.1 gereğince, $x, y \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, d' sayısının $m = d' \cdot 1 = d'$ katı $d' = ax + by$ şeklinde yazılabilir. İspatın ikinci paragrafında belirtildiği gibi $a = dc$ ve $b = de$ olacak şekilde $c, e \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $d' = ax + by = dcx + dey = d(cx + ey)$ bulunur. O halde d' sayısı d sayısının bir katıdır. Ancak, d ve d' sayılarının her ikisi de pozitif olduğu için

$$d \leqslant d'$$

bulunur. Sonuç olarak, $d' \leqslant d$ ve $d \leqslant d$ olduğu için $d = d'$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır. □

7.4 Yapısal İspatlar ve Yapısal Olmayan İspatlar

Varlık ispatları, yapısal ispatlar ve yapısal olmayan ispatlar olarak iki kategoriye ayrılır. Yapısal ispatlar, teoremi kanıtlayan örneği açık bir şekilde ortaya koyar. Yapısal olmayan ispatlar ise örneği açıkça vermez ancak onun var olduğunu gösterir. Şimdi bu ikisi arasındaki farkı şu örneği kullanarak gösterelim: x^y rasyonel olacak şekilde (eşit olması muhtemel) x ve y irrasyonel sayıları vardır.

Önerme. *Öyle x ve y irrasyonel sayıları vardır ki x^y rasyoneldir.*

İspat. Kabul edelim ki $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ve $y = \sqrt{2}$ olsun. Bildiğimiz üzere y irrasyoneldir ancak x sayısının rasyonel ya da irrasyonel olduğu açık değildir. Bir tarafta, eğer x irrasyonel ise

$$x^y = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

olduğu için irrasyonel bir sayının irrasyonel kuvveti rasyonel olmuş olur. Diğer tarafta, eğer x rasyonel ise $y^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}} = x$ rasyoneldir. Her halükarda irrasyonel bir sayının irrasyonel kuvveti rasyoneldir. □

Yukarıdaki örnek klasik bir **yapısal olmayan** ispat örneğidir. Bize, sayıları açıkça vermeden (ya da inşa etmeden), x^y rasyonel olacak şekilde x ve y irrasyonel sayılarının var olduğunu gösterir. Bir başka ifadeyle, bizi $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ veya $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ sayılarından birinin, irrasyonel bir sayının irrasyonel kuvveti olan rasyonel sayı olduğuna ikna eder ancak bunun hangisi olduğunu söylemez. Bu nedenle açıkça vermeden böyle bir örneğin var olduğunu kanıtlar.

Şimdi x^y ifadesini rasyonel yapan x ve y irrasyonel sayılarını açık bir şekilde veren (ya da inşa eden) **yapısal ispatı** yapalım.

Önerme. *Öyle x ve y irrasyonel sayıları vardır ki x^y rasyoneldir.*

İspat. Kabul edelimki $x = \sqrt{2}$ ve $y = \log_2 9$ olsun. Bu durumda

$$x^y = \sqrt{2}^{\log_2 9} = \sqrt{2}^{\log_2 3^2} = \sqrt{2}^{2\log_2 3} = \left(\sqrt{2}^2\right)^{\log_2 3} = 2^{\log_2 3} = 3$$

olur. Dikkat edilirse 3 rasyonel olduğu için $x^y = 3$ rasyoneldir.

Bildiğimiz üzere $x = \sqrt{2}$ irrasyoneldir. Eğer $y = \log_2 9$ sayısının da irrasyonel olduğunu gösterebilirsek, ispat tamamlanır. Bunu olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $\log_2 9$ rasyonel olsun. Bu durumda $\frac{a}{b} = \log_2 9$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır. Buradan $2^{a/b} = 9$ yazılabilir. Buna göre $(2^{a/b})^b = 9^b$ ya da $2^a = 9^b$ elde edilir. Dikkat edilirse 2^a çifttir fakat 9^b tektir (çünkü 9 tamsayısının b defa kendisiyle çarpımı tektir). Bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Yukarıdaki varlık ispatı, $\log_2 9$ sayısının irrasyonel olmasının (olmayana ergi ile) ayrı bir ispatını da içerisinde barındırır. İspat yöntemleri tipik olarak bu şekilde kombine edilebilir.

Diğer kitap ve makalelerdeki ispatları okurken, ya da kendi ispatlarınızı yaparken, yapısal olan veya yapısal olmayan ispatlara karşı hazırlıklı olmalısınız.

Alıştırmalar

Aşağıdaki önermeleri ispatlayınız. Buradaki alıştırmalar, Üniteler 4-7'de ele alınan yöntemlerin tamamını kapsayan kümülatif alıştırmalardır.

1. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda x çifttir ancak ve ancak $3x + 5$ tektir.

2. Kabul edelim ki $x \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda x tektir ancak ve ancak $3x + 6$ tektir.

3. Verilen bir a tamsayısı için, $a^3 + a^2 + a$ çifttir ancak ve ancak a çifttir.
4. Verilen bir a tamsayısı için, $a^2 + 4a + 5$ tektir ancak ve ancak a çifttir.
5. Bir a tamsayısı tektir ancak ve ancak a^3 tektir.
6. Kabul edelim ki $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $x^3 + x^2 y = y^2 + xy$ ancak ve ancak $y = x^2$ veya $y = -x$.
7. Kabul edelim ki $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ ancak ve ancak $x = 0$ veya $y = 0$.
8. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Buna göre $a \equiv b \pmod{10}$ ancak ve ancak $a \equiv b \pmod{2}$ ve $a \equiv b \pmod{5}$ olduğunu ispatlayınız.
9. Kabul edelim ki $a \in \mathbb{Z}$ olsun. Buna göre $14 \mid a$ ancak ve ancak $7 \mid a$ ve $2 \mid a$ olduğunu ispatlayınız
10. Eğer $a \in \mathbb{Z}$ ise $a^3 \equiv a \pmod{10}$ olur.
11. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Buna göre $(a - 3)b^2$ çifttir ancak ve ancak a tektir veya b çifttir.
12. $x^2 < \sqrt{x}$ olacak şekilde pozitif bir x reel sayısı vardır.
13. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a + b$ tek ise $a^2 + b^2$ tektir.
14. Kabul edelim ki $a \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $a^2 \mid a$ ancak ve ancak $a \in \{-1, 0, 1\}$.
15. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Buna göre $a + b$ çifttir ancak ve ancak a ile b aynı paritelidir.
16. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer ab tek ise $a^2 + b^2$ çifttir.
17. 90 ile 100 arasında bir asal sayı vardır.
18. $\mathbb{N} \in X$ ve $\mathbb{N} \subseteq X$ olacak şekilde bir X kümesi vardır.
19. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ olur.
20. $11 \mid (2^n - 1)$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.
21. $x^3 + x - 3 = 0$ denkleminin her çözümü irrasyneldir.
22. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $4 \mid n^2$ veya $4 \mid (n^2 - 1)$ olur.
23. Kabul edelim ki a, b ve c tamsayılar olsun. Eğer $a \mid b$ veya $a \mid (b^2 - c)$ ise $a \mid c$ olur.

24. Eğer $a \in \mathbb{Z}$ ise $a \nmid (a^2 - 3)$.

25. Eğer $p > 1$ bir tamsayı ve $2 \leqslant n \leqslant \sqrt{p}$ şartını sağlayan her n tamsayısı için $n \nmid p$ ise p asaldır.

26. Ardışık n tane pozitif tamsayının çarpımı $n!$ ile bölünür.

27. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a^2 + b^2$ bir tamkare ise a ve b aynı anda tek değildir.

28. Bölme algoritmasını ispatlayınız: Eğer $a, b \in \mathbb{N}$ ise $a = bq + r$ olacak ve $0 \leqslant r < b$ şartını sağlayacak şekilde q ve r tamsayıları vardır. Üstelik bu sayılar *bir tektir*. (Bu örneğin varlık kısmının ispatı Bölüm 1.9'da verilmiştir fakat teklik kısmı da yapılmalıdır.)

29. Eğer $a \mid bc$ ve $\text{ebob}(a, b) = 1$ ise $a \mid c$ olur. (Yol gösterme: 150. sayfada verilen önermeyi kullanabilirsiniz.)

30. Kabul edelim ki $a, b, p \in \mathbb{Z}$ ve p asal olsun. Eğer $p \mid ab$ ise $p \mid a$ veya $p \mid b$ olduğunu ispatlayınız. (Yol gösterme: 150. sayfada verilen önermeyi kullanabilirsiniz.)

31. Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ise $\text{ebob}(n, n+1) = 1$ olur.

32. Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ise $\text{ebob}(n, n+2) \in \{1, 2\}$ olur.

33. Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ise $\text{ebob}(2n+1, 4n^2+1) = 1$ olur.

34. Eğer $\text{ebob}(a, c) = \text{ebob}(b, c) = 1$ ise $\text{ebob}(ab, c) = 1$ olur. (Yol gösterme: 150. sayfada verilen önermeyi kullanabilirsiniz.)

35. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $a = \text{ebob}(a, b)$ ancak ve ancak $a \mid b$.

36. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $a = \text{ekok}(a, b)$ ancak ve ancak $b \mid a$.

Bölüm 8

Kümeleri İçeren İspatlar

Öğrenciler aldıkları ilk ileri düzey matematik derslerinde, kümelerin oynadığı kapsamlı role ve karşılaştıkları ispatların çoğunun kümeler hakkında olmasına genellikle çok şaşırır. Muhtemelen belirli özellikleri sağlayan (ve vektörler olarak adlandırılan) nesnelerin kümesini bir **vektör uzayı** olarak tanımlayan lineer cebir derslerinde bu tür ispatlarla karşılaşmışsınızdır. Ders kitabınız kümeler teorisi yöntemlerini kullanarak, örneğin iki vektör uzayının kesişiminin yine bir vektör uzayı olması gibi, vektör uzayları konusunda çok şey ispatlamıştır. Matematikte daha derinlere daldıkça, kümeleri içeren teorem ve ispatlar konusunda daha fazla fikir edineceksiniz. Bu ünitenin amacı, sizi buna hazırlayacak temeli kazandırmaktır.

Burada bir nesnenin, bir kümenin elemanı olduğunun nasıl gösterileceğini; bir kümenin, başka bir kümenin altkümesi olduğunun nasıl ispatlanacağını ve iki kümenin eşit olduklarının nasıl gösterileceğini tartışacağız. Bu bölümü okurken zaman zaman belleğimizi tazelemek adına Ünite 1'e atıf yapmak gerekebilir. Sizlere kolaylık sağlamak açısından Ünite 1'de verilen ana tanımlar aşağıda özetlenmiştir. Eğer A ve B iki küme ise

$$\begin{aligned}
A \times B &= \{(x,y) : x \in A,\, y \in B\},\\
A \cup B &= \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\},\\
A \cap B &= \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\},\\
A - B &= \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\},\\
\overline{A} &= U - A,
\end{aligned}$$

olarak tanımlıdır. Hatırlanacağı üzere $A \subseteq B$ ifadesi, A kümesinin her elemanının aynı zamanda B kümesinin de bir elemanı olması anlamına gelir.

8.1 "$a \in A$" Önermesi Nasıl İspatlanır

Ortak özellik yöntemini tekrar ederek işe başlayalım. Ondan sonra, verilen bir a nesnesinin bir A kümesine ait olmasının nasıl gösterileceğini gözden geçirelim.

Genel olarak, bir A kümesi ortak özellik yöntemi kullanılarak $A = \{x : P(x)\}$ formunda ifade edilecektir. Buradaki $P(x)$ ifadesi, x elemanı hakkındaki bir önermedir (veya açık önermedir). Buradan, $P(x)$ önermesini doğru yapan x nesnelerinin A kümesinin elemanları olduğu anlaşılır. Örneğin,

$$\{x : x \text{ bir tek tamsayı}\} = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}.$$

Bu notasyon yaygın olarak $A = \{x \in S : P(x)\}$ şeklinde de kullanılanır. Buradaki A kümesi, (önceden belirlenmiş) bir S kümesinin P önermesini doğrulayan bütün x elemanlarından oluşur. Unutmayınız ki, x elemanı duruma göre herhangi bir nesne (tamsayı, sıralı ikili, küme, fonksiyon vb.) olabilir. Buna ek olarak, kullanılan x değişkeninin özel bir anlamı yoktur; herhangi x, y, k ve benzeri makul bir sembol kullanılabilir. Aşağıda bunun bazı örnekleri verilmiştir:

$$\begin{aligned}
\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ tek}\} &= \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\},\\
\{x \in \mathbb{N} : 6 \mid x\} &= \{6, 12, 18, 24, 30, \ldots\},\\
\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : b = a + 5\} &= \{\ldots, (-2, 3), (-1, 4), (0, 5), (1, 6), \ldots\},\\
\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) : |X| = 1\} &= \{\ldots, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Yukarıdaki bilgiler ışığında, bir a nesnenin $\{x : P(x)\}$ kümesine ait olmasının nasıl ispatlanacağı anlaşılmış olmalıdır. Dikkat edilirse $\{x : P(x)\}$ kümesi $P(x)$ önermesini doğru yapan bütün x elemanlarından oluşur. O halde, $a \in \{x : P(x)\}$ olduğunu göstermek için sadece $P(a)$ önermesinin doğru olduğunu göstermek yeterlidir. Benzer şekilde $a \in \{x \in S : P(x)\}$ olduğunu göstermek için de, $a \in S$ *ve* $P(a)$ önermesinin doğru olduğu gösterilmelidir. Bu fikirler aşağıda özetlenmiştir. Bu metodları **ezberlemeden anlamanız** gerekir. Bunlar, düşünerek ve pratik yaparak daha doğal ve kullanılabilir bir hale gelecektir.

Nasıl $a \in \{x : P(x)\}$ Olduğu Gösterilir

$P(a)$ önermesinin doğru olduğu gösterilir.

Nasıl $a \in \{x \in S : P(x)\}$ Olduğu Gösterilir

1. Öncelikle $a \in S$ olduğu doğrulanır.
2. $P(a)$ önermesinin doğru olduğu gösterilir.

Örnek 8.1. $A = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ ve } 7 \mid x\}$ kümesinin elemanlarını inceleyelim. Burada, $P(x)$ açık önermesi $(x \in \mathbb{N}) \wedge (7 \mid x)$ olmak üzere $A = \{x : P(x)\}$ formundadır. Buna göre $P(21)$ doğru olduğu için $21 \in A$ olur. Benzer şekilde $7, 14, 28, 35$ vb. sayılarının hepsi A kümesinin elemanlarıdır. Fakat örneğin $P(8)$ yanlış olduğu için $8 \notin A$ olur. Benzer şekilde $P(-14)$ yanlış olduğu için $-14 \notin A$ olur.

Örnek 8.2. $A = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : |X| = 3\}$ kümesini ele alalım. Dikkat edilirse $\{4, 13, 45\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ve $|\{4, 13, 45\}| = 3$ olduğu için $\{4, 13, 45\} \in A$ olur. Benzer şekilde $\{1, 2, 3\} \in A$ ve $\{10, 854, 3\} \in A$

olduğu görülebilir. Fakat $|\{1,2,3,4\}| \neq 3$ olduğu için $\{1,2,3,4\} \notin A$ olur. Dahası $\{-1,2,3\} \notin \mathcal{P}(\mathbb{N})$ olduğu için $\{-1,2,3\} \notin A$ olur.

Örnek 8.3. $B = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \,(\mathrm{mod}\, 5)\}$ kümesini göz önüne alalım. Dikkat edilirse $(8,23) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ve $8 \equiv 23 \,(\mathrm{mod}\, 5)$ olduğu için $(8,23) \in B$ bulunur. Benzer şekilde $(100,75) \in B$, $(102,77) \in B$ fakat $(6,10) \notin B$ olduğu görülebilir.

Şimdi, $n \in \mathbb{Z}$ olduğunu kabul ederek $(4n+3, 9n-2)$ sıralı ikilisini ele alalım. Bu sıralı ikili B'nin bir elemanı mıdır? Bu soruya cevap verebilmek için ilk önce $(4n+3, 9n-2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ olduğunu gözlemlenebilir. Daha sonra $(4n+3)-(9n-2) = -5n+5 = 5(1-n)$ olduğu için $5 \mid \big((4n+3)-(9n-2)\big)$ yani $(4n+3) \equiv (9n-2) \,(\mathrm{mod}\, 5)$ olduğu görülebilir. O halde $(4n+3, 9n-2)$ sıralı ikilisi B kümesine ait olabilmek için gerekli şartları taşımaktadır. Bu nedenle her $n \in \mathbb{Z}$ için $(4n+3, 9n-2) \in B$ olur.

Örnek 8.4. Kümeleri tanımlarken yaygın olarak kullanılan başka bir yolu gösterelim. Bunun için $C = \{3x^3+2 : x \in \mathbb{Z}\}$ kümesini ele alalım. Buna göre x bir tamsayı olmak üzere, $3x^3+2$ formundaki bütün elemanlar C kümesini oluşturur. O halde, $-22 = 3(-2)^3+2$ olduğu için $-22 \in C$ olur. Diğer taraftan, $-1 \in C$, $5 \in C$ fakat $0 \notin C$, $\frac{1}{2} \notin C$ vb. örnekleri doğrulayabilirsiniz.

8.2 "$A \subseteq B$" Önermesi Nasıl İspatlanır

Bu derste (ve daha önemlisi onun da ötesinde) bir kümenin, başka bir kümenin altkümesi olduğunu göstermenizin gerekeceği birçok durumla karşılaşacaksınız. Bu bölümde bu işin nasıl yapılacağı açıklanacaktır. Buradaki metodlar, hem kendi ispatlarınızı yazma hem de okuduğunuz ispatları anlama becerilerinizi geliştirecektir.

Tanım 1.3'den hatırlanacağı üzere, eğer A ve B iki küme ise $A \subseteq B$ ifadesi A kümesinin her elemanının aynı zamanda B kümesinin de bir elemanı olması anlamına gelir. Başka bir deyişle bu ifadenin anlamı, *eğer* $a \in A$ *ise* $a \in B$ *olur* şeklindedir. Bu nedenle $A \subseteq B$ olduğunu ispatlamak için

"Eğer $a \in A$ ise $a \in B$ olur."

koşullu önermesini kanıtlamak gerekir. Bu, direk ispat yöntemiyle şu şekilde yapılır: $a \in A$ kabul edilir ve $a \in B$ olduğu gösterilir. Diğer taraftan, dolaylı ispat yöntemi de ayrı bir yaklaşımdır: $a \notin B$ kabul edilir ve $a \notin A$ sonucuna ulaşılır. Bu iki yaklaşım aşağıda özetlenmiştir.

"$A \subseteq B$" Doğrudan Nasıl İspatlanır

İspat. Kabul edelim ki $a \in A$ olsun.

$\vdots$

Buradan $a \in B$ bulunur. O halde, $a \in A$ olması $a \in B$ olmasını gerektirir. Böylece $A \subseteq B$ olması gerekir. □

"$A \subseteq B$" Dolaylı Olarak Nasıl İspatlanır

İspat. Kabul edelim ki $a \notin B$ olsun.

$\vdots$

Buradan $a \notin A$ bulunur. O halde, $a \notin B$ olması $a \notin A$ olmasını gerektirir. Böylece $A \subseteq B$ olması gerekir. □

Pratikte, en yalın ve en kolay ispat genellikle doğrudan ispat yaklaşımıyla yapılır. Bazı durumlarda ise dolaylı ispat yaklaşımı daha uygundur. ($A \subseteq B$ önermesi olmayana ergi yöntemiyle bile ispatlanabilir. Bunun için $(a \in A) \wedge (a \notin B)$ kabul edilerek bir çelişkiye ulaşılır). Bu bölümün geri kalan kısmı ara sıra yorum içeren örneklerden oluşmaktadır. Aksi belirtilmedikçe, tüm ispatlar doğrudan ispat yöntemi kullanılarak yapılacaktır. Yukarıda özeti verilen bu ispat yaklaşımının nasıl kullanıldığına özellikle dikkat edilmelidir.

Örnek 8.5. $\{x \in \mathbb{Z} : 18 \mid x\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ olduğunu ispatlayınız.

İspat. Kabul edelim ki $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 18 \mid x\}$ olsun.

- Bu kabul, $a \in \mathbb{Z}$ ve $18 \mid a$ anlamına gelir.
- Bölünebilme tanımından $a = 18c$ olacak şekilde bir c tamsayısı vardır.
- Buna göre $a = 6(3c)$ yazılarak $6 \mid a$ bulunur.
- O halde a tamsayısı 6 ile tam bölünen sayılardan biridir ve böylece $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ bulunur.

Buna göre $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 18 \mid x\}$ iken $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ olmasını gerektiğini gösterdik. Böylece $\{x \in \mathbb{Z} : 18 \mid x\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ olması gerekir. □

Örnek 8.6. $\{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} : 9 \mid x\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ olduğunu ispatlayınız.

İspat. Kabul edelim ki $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} : 9 \mid x\}$ olsun.

- Bu kabul, kesişim tanımından $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\}$ ve $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 9 \mid x\}$ olması anlamına gelir.
- İlk önce, $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\}$ olduğu için $2 \mid a$ olur ve bu nedenle $a = 2c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır. O halde a çifttir.
- Daha sonra, $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 9 \mid x\}$ olduğu için $9 \mid a$ olup $a = 9d$ olacak şekilde bir $d \in \mathbb{Z}$ vardır.
- Dikkat edilirse a çift ve $a = 9d$ olduğu için d çift olmalıdır. (Aksi halde $a = 9d$ tek olur).
- O halde $d = 2e$ olacak şekilde bir e tamsayısı vardır ve böylece $a = 9d = 9(2e) = 6(3e)$ olur.
- Buna göre $a = 6(3e)$ eşitliğinden $6 \mid a$ sonucuna varılır ve bu $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ anlamına gelir.

O halde, $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} : 9 \mid x\}$ iken $a \in \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ olması gerektiğini ispatladık. Böylece $\{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} : 9 \mid x\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\}$ olması gerekir. □

Örnek 8.7. $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod 6\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod 3\}$ olduğunu gösteriniz.

İspat. Kabul edelim ki $(a,b) \in \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod 6\}$ olsun.

- Bu kabul $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ve $a \equiv b \pmod 6$ olması anlamına gelir.

- Buna göre $6 \mid a-b$ olacağı için $(a-b) = 6c$ olacak şekilde bir c tamsayısı vardır.
- Buradan $a-b = 3(2c)$ yazılarak $3 \mid (a-b)$ veya buna denk olan $a \equiv b \pmod 3$ elde edilir.

O halde $(a,b) \in \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x \equiv y \pmod 6\}$ iken $(a,b) \in \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x \equiv y \pmod 3\}$ olmasını gerektiğini gördük. Böylece $\{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x \equiv y \pmod 6\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x \equiv y \pmod 3\}$ olması gerekir. $\square$

Altkümeleri içeren bazı önermeler yeterince açık olduğu için bunları ispatlamadan doğru kabul edebiliriz (ve kullanabiliriz). Örneğin A ve B iki küme ise $A \cap B \subseteq A$ ifadesini doğrulamak çok kolaydır. (Bunun sebebi, $x \in A \cap B$ kabul edilirse kümelerin kesişim tanımından $x \in A$ ve $x \in B$ olur. Burada özel olarak $x \in A$ olduğu için, $x \in A \cap B$ olması $x \in A$ olmasını gerektirir. Böylece $A \cap B \subseteq A$ elde edilir.) $A \subseteq A \cup B$ ve $A - B \subseteq A$ önermeleri de bu niteliktedir. Bunlara $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$ ve $(X \subseteq A) \Rightarrow (X \subseteq A \cup B)$ örneklerinde olduğu gibi koşullu önermeler eklenebilir. Bu kitaptaki temel yaklaşım, doğruluğu açık olan önermeleri bizden istemediği sürece ispatlamamaktır. (Yine de kendinizi yukarıdaki önermelerin doğru olduklarına ikna etmek için kafadan hızlı ispatlar yapabilirsiniz. Eğer $A \cap B \subseteq A$ ifadesinin doğru olduğunu görüp $A \subseteq A \cap B$ ifadesinin her zaman doğru olmak zorunda olmadığını göremiyorsanız, bu konuya daha fazla vakit ayırmalısınız).

Bir sonraki örnekte, eğer A ve B iki küme ise $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ olduğunu göstereceğiz. İspata başlamadan önce, bu önermenin gerçekten de mantıklı olup olmadığını görmek için bir örneğe bakalım. Kabul edelim ki $A = \{1,2\}$ ve $B = \{2,3\}$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\} \cup \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\} \\ &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$ ile verilir. Böylece yukarıda özel olarak seçilen A ve B kümeleri için $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$ olsa bile $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ ifadesi doğrudur. Şimdi A ile B ne olursa olsun $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ önermesinin her zaman doğru olduğunu gösterelim.

Örnek 8.8. Eğer A ve B herhangi iki küme ise $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ olduğunu ispatlayınız.

İspat. Kabul edelim ki $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ olsun.

- Bu kabul, birleşim tanımına göre $X \in \mathcal{P}(A)$ veya $X \in \mathcal{P}(B)$ olması anlamına gelir.
- Kuvvet kümesi tanımından $X \subseteq A$ veya $X \subseteq B$ yazılabilir. Şimdi bu durumları inceleyelim:

  1. Durum. $X \subseteq A$ olsun. Buradan $X \subseteq A \cup B$ olur. Bu ise $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ anlamına gelir.

  2. Durum. $X \subseteq B$ olsun. Buradan $X \subseteq A \cup B$ olur. Bu ise $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ anlamına gelir.

(Burada $X \subseteq A$ *ve* $X \subseteq B$ durumunu dikkate almak gerekmez. Çünkü 1. veya 2. durum bunu kapsar). Yukarıdaki durumların her ikisi de $X \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ olduğunu gösterir.

O halde $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ olması $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ olmasını gerektirir. Bu ise $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ önermesinin ispatını tamamlar. □

Bir sonraki örnekte, koşullu bir önermeyi kanıtlayacağız. Doğrudan ispat yöntemini kullanacağımız bu süreçte, $A \subseteq B$ ifadesini göstermek için standart yöntemimizi kullanacağız.

Örnek 8.9. Kabul edelim ki A ve B iki küme olsun. Eğer $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ ise $A \subseteq B$ olur.

İspat. Doğrudan ispat yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ olsun.

- Bu varsayıma dayalı olarak $A \subseteq B$ olduğunu ispatlamamız gerekmektedir.
- Buna göre $A \subseteq B$ olduğunu göstermek için $a \in A$ olduğunu kabul edelim.
- Tek elemanlı $\{a\}$ kümesi A'nın bir altkümesi olduğu için $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ olur.
- Üstelik $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ olduğu için $\{a\} \in \mathcal{P}(B)$ bulunur.
- Bu ise $\{a\} \subseteq B$ anlamına gelir ve $a \in B$ elde edilir.

Buna göre $a \in A$ iken $a \in B$ olması gerektiğini ve böylece $A \subseteq B$ olduğunu göstermiş olduk. □

8.3 "$A = B$" Önermesi Nasıl İspatlanır

İspatlarda genellikle iki kümenin eşit olduklarını göstermek gerekir. Bunu yapmanın standart bir yolu vardır. Buna göre $A = B$ olduğunu göstermek istediğimizi varsayalım. Eğer $A \subseteq B$ olduğunu gösterirsek, A'daki her elemanın B'nin içinde olduğunu göstermiş oluruz ancak B'de olup da A'da olmayan elemanlar olabilleceği için buradan $A = B$ çıkarımı yapılamaz. Buna ek olarak eğer $B \subseteq A$ olduğunu gösterirsek B kümesi, A'da olmayan herhangi bir elemanı içeremez ve böylece $A = B$ olur. O halde $A = B$ önermesini ispatlamanın standart yolu $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olduğunu göstermektir.

"$A = B$" Önermesi Nasıl İspatlanır

İspat.
[$A \subseteq B$ olduğunu ispatlayın.]
[$B \subseteq A$ olduğunu ispatlayın.]

Böylece $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olduğu için $A = B$ bulunur. □

Örnek 8.10. $\{n \in \mathbb{Z} : 35 \mid n\} = \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ olduğunu ispatlayınız.

İspat. İlk önce $\{n \in \mathbb{Z} : 35 \mid n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 35 \mid n\}$ olsun. Bu $35 \mid a$ anlamına gelir ve böylece $a = 35c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $a = 5(7c)$ ve $a = 7(5c)$ yazılabilir. Dikkat edilirse $a = 5(7c)$ ifadesinden $5 \mid a$ ve böylece $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\}$ bulunur. Benzer şekilde $a = 7(5c)$ ifadesinden $7 \mid a$ ve böylece $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ bulunur. Buna göre a elemanı hem $\{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\}$ hem de $\{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ kümesine ait olduğu için $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ bulunur. O halde $\{n \in \mathbb{Z} : 35 \mid n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ olmalıdır.

Şimdi $\{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : 35 \mid n\}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ olsun. Kesişim tanımından $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\}$ ve $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ yazılabilir. Buradan $5 \mid a$ ve $7 \mid a$ bulunur. Bölünebilme tanımına göre $a = 5c$ ve $a = 7d$ olacak şekilde c ve d tamsayıları vardır. Dikkat edilirse 5 ve 7 sayıları a tamsayısının asal çarpanlarıdır. Bu nedenle a tamsayısının asal ayrışımı 5 ve 7 tamsayılarını içerir. Buna göre $5 \cdot 7 = 35$ sayısı a tamsayısını böler ve böylece $a \in \{n \in \mathbb{Z} : 35 \mid n\}$ bulunur. Buna göre $\{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : 35 \mid n\}$ olduğu gösterilmiş olur.

Böylece $\{n \in \mathbb{Z} : 35 \mid n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ ve $\{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : 35 \mid n\}$ olduğunu gösterdik. Sonuç olarak $\{n \in \mathbb{Z} : 35 \mid n\} = \{n \in \mathbb{Z} : 5 \mid n\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : 7 \mid n\}$ olduğunu ispatladık. □

Cebir derslerinden bildiğiniz üzere eğer $ac = bc$ ve $c \neq 0$ ise $a = b$ olur. Şimdiki örneğimizde, bu önermenin bir benzerini A, B ve C kümeleri için ispatlayalım. Bu örnek, bizden koşullu bir önermeyi ispatlamamızı isteyecektir. Bu işi doğrudan ispat yöntemiyle yapalım. Bu süreçte, öğrendiğimiz yeni teknikleri kullanmamız gerekecektir.

Örnek 8.11. Kabul edelim ki A, B ve C üç küme ve $C \neq \varnothing$ olsun. Eğer $A \times C = B \times C$ ise $A = B$ olduğunu ispatlayınız.

İspat. Kabul edelim ki $A \times C = B \times C$ olsun. Buna göre $A = B$ olduğunu göstermeliyiz.

İlk önce $A \subseteq B$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $a \in A$ olsun. $C \neq \varnothing$ olduğu için en az bir $c \in C$ vardır. Buna göre $a \in A$ ve $c \in C$ olup, kartezyen çarpım tanımından $(a, c) \in A \times C$ yazılabilir. Fakat $A \times C = B \times C$ olduğu için $(a, c) \in B \times C$ ve buradan da $a \in B$ bulunur. O halde $a \in A$ iken $a \in B$ olması gerekir. Böylece $A \subseteq B$ elde edilir.

Şimdi $B \subseteq A$ olduğunu gösterelim. Bunu, yukarıda kullandığımız argümandaki A ve B kümelerinin rollerini değiştirerek yapabiliriz. Kabul edelim ki $a \in B$ olsun. $C \neq \varnothing$ olduğu için en az bir $c \in C$ vardır. Buna göre $a \in B$ ve $c \in C$ olup $(a, c) \in B \times C$ yazılabilir. Fakat $B \times C = A \times C$ olduğu için $(a, c) \in A \times C$ ve buradan da $a \in A$ elde edilir. O halde $a \in B$ iken $a \in A$ olması gerekir. Böylece $B \subseteq A$ elde edilir.

Yukarıdaki iki paragraf $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ olduğunu gösterir. Buradan $A = B$ bulunur. Özetleyecek olursak, eğer $A \times C = B \times C$ ise $A = B$ olduğunu gösterdik. Böylece ispat tamamlamıştır.

□

Şimdi küme operasyonlarının, sayılar üzerindeki operasyonlara olan benzerliklerine başka bir açıdan bakalım. Cebir derslerinde $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ ile verilen dağılma özelliğine aşina olmalısınız. Buradaki a, b, c sayılarını A, B, C kümeleriyle; $\cdot$ işlemini $\times$ ve $+$ işlemini de $\cap$ ile değiştirelim. Buna göre $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ elde ederiz. Şimdi bu önermenin doğru olduğunu ispatlayalım.

Örnek 8.12. Verilen A, B ve C kümeleri için $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ olduğunu ispatlayınız.

İspat. İlk önce $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$ olduğunu gösterelim.

- Kabul edelim ki $(a, b) \in A \times (B \cap C)$ olsun.
- Kartezyen çarpım tanımından $a \in A$ ve $b \in B \cap C$ olur.
- Kesişim tanından $b \in B$ ve $b \in C$ olur.
- Buna göre $a \in A$ ve $b \in B$ olduğu için ($\times$ tanımından) $(a, b) \in A \times B$ bulunur.
- Benzer şekilde $a \in A$ ve $b \in C$ olduğu için ($\times$ tanımından) $(a, b) \in A \times C$ bulunur.
- O halde $(a, b) \in A \times B$ ve $(a, b) \in A \times C$ olduğu için $(a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ elde edilir.

Buna göre $(a, b) \in A \times (B \cap C)$ olması $(a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ olmasını gerektirir. Böylece $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$ elde edilir.

Şimdi $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$ olduğunu gösterelim.

- Kabul edelim ki $(a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ olsun.
- Kesişim tanından $(a, b) \in A \times B$ ve $(a, b) \in A \times C$ olur.
- Kartezyen çarpım tanımına göre $(a, b) \in A \times B$ ifadesi $a \in A$ ve $b \in B$ anlamına gelir.
- Kartezyen çarpım tanımına göre $(a, b) \in A \times C$ ifadesi $a \in A$ ve $b \in C$ anlamına gelir.
- Burada $b \in B$ ve $b \in C$ olduğu için yine kümelerin kesişim tanından $b \in B \cap C$ bulunur.
- O halde $a \in A$ ve $b \in B \cap C$ olduğu için $(a, b) \in A \times (B \cap C)$ bulunur.

Özetle $(a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ olması $(a, b) \in A \times (B \cap C)$ olmasını gerektirir. Buna göre $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$ elde edilir.

Yukarıda $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$ ve $(A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$ olduğu gösterilmiştir. Sonuç olarak $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ elde edilir.

□

Bazen iki kümenin eşitliği doğrudan gösterilebilir. Bunun için kümelerin birinden başlanır ve bir dizi eşitlik kullanılarak diğer küme elde edilir. Bu iş, iki tane cebirsel denklemin eşit olduğunu göstermek için birinin manipüle edilerek diğerinin elde edilmesine benzer. Şimdi, önceki örneği bu yöntemle gösterelim. Bu şekilde bu örnek için alternatif bir çözümde elde ederiz. Burada uyarmak gerekirse bu yaklaşımı uygulamak bazen zordur; fakat bu uygulanabildiği zaman ispatı önemli ölçüde kısaltır.

Örneğe başlamadan önce önemli bir noktaya değinelim. Herhangi bir P önermesi mantıksal olarak $P \wedge P$ önermesine denktir. (Eğer bundan şüphe duyarsanız doğruluk tablolarına bakabilirsiniz). Aşağıdaki örneğin bir noktasında $x \in A$ ifadesi ,mantıksal olarak buna denk olan $(x \in A) \wedge (x \in A)$ ifadesiyle değiştirilecektir.

Örnek 8.13. Herhangi A, B ve C kümeleri için $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ önermesini ispatlayınız.

İspat. Aşağıdaki eşitlikleri gözlemleyiniz:

$$\begin{aligned}
A \times (B \cap C) &= \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in B \cap C)\} && (\times \text{ tanımı})\\
&= \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (y \in C)\} && (\cap \text{ tanımı})\\
&= \{(x,y) : (x \in A) \wedge (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (y \in C)\} && (P = P \wedge P)\\
&= \{(x,y) : ((x \in A) \wedge (y \in B)) \wedge ((x \in A) \wedge (y \in C))\} && (\text{yeniden düzenleme})\\
&= \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in B)\} \cap \{(x,y) : (x \in A) \wedge (y \in C)\} && (\cap \text{ tanımı})\\
&= (A \times B) \cap (A \times C) && (\times \text{ tanımı})
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Yukarıda gösterdiğimiz $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ eşitliğili, matematik çalışmaya devam ettiğimiz sürece oldukça sık kullanacağımız temel bir kanundur. Buna benzer bazı eşitlikler aşağıda listelenmiştir. Alıştırmalar kısmında kanıtlamanız istenilen bu eşitliklerden herbiri bu bölümünde verilen yöntemler kullanılarak ispatlanabilir.

$$\left.\begin{aligned}\overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}\\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}\end{aligned}\right\} \quad \text{Kümeler için DeMorgan kuralları,}$$

$$\left.\begin{aligned}A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C)\\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)\end{aligned}\right\} \quad \text{Kümeler için dağılma kuralları,}$$

$$\left.\begin{aligned}A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C)\\ A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C)\end{aligned}\right\} \quad \text{Kümeler için dağılma kuralları.}$$

Pratik yapmak için bu denklemleri ispatlamanız faydalıdır. Öğrenme stilinize bağlı olarak, bunları akılda tutmanız büyük olasılıkla gerekmez ancak tamamen unutmanız da tavsiye edilmez. Bu denklemler, matematik eğitiminizin ilerideki aşamalarında yararlı olabilir. İhtiyaç duyduğunuzda bunlara yeniden bakabilir ya da yeniden türetebilirsiniz. Eğer yoğunlaşarak matematik çalışmaya devam ederseniz, bir süre sonra farkında bile olmadan bunları özümsediğinizi göreceksiniz.

8.4 Örnekler: Mükemmel Sayılar

Bazen iki kümenin eşit veya birinin diğerinin altkümesi olduğunu göstermek için iyi bir çalışma ve yaratıcılık gerekir. Şimdi bunu mükemmel sayılar adı verilen sayılar teorisi örnekleriyle gösterelim. 2000 yıldan fazla bir geçmişe sahip olan bu eski sorudan bugün bile cevaplanmamış bazı soruları ortaya sürülebilir.

Problem bir doğal sayının pozitif bölenlerinin toplamı hakkındadır. Bu konuya 12 tamsayısının bölenlerini ele alarak başlayalım. 12'nin kendisinden küçük olan pozitif bölenlerinin toplamı $1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$ olur ve bu sayı 12'den büyüktür. Aynı iş 15 için yapılarak $1 + 3 + 5 = 9$ bulunur ve bu toplam da 15'ten küçüktür. Çoğunlukla, verilen bir p doğal sayısının kendisinden küçük pozitif bölenlerinin toplamı p'den ya daha az ya da daha fazladır. Ancak bazen bölenlerin toplamı tam olarak p olur. Bu durumda p sayısına *mükemmel sayı* denir.

Tanım 8.1. *Kendisi dışındaki pozitif tam bölenleri toplamı yine kendisine eşit olan bir p doğal sayısına* ***mükemmel sayı*** *denir.*

Aşağıda bazı örnekler verilmiştir:

- $6 = 1 + 2 + 3$ olduğu için 6 mükemmeldir.
- $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ olduğu için 28 mükemmeldir.
- $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$ olduğu için 496 mükemmeldir.

Deneme-yanılma yoluyla bulmak çok vakit alsa da, 496'dan sonraki mükemmel sayı 8128'dir. Bunu şu şekilde doğrulayabiliriz. Bu sayının bölenleri 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 254, 508, 1016, 2032 ve 4064 olup gerçekten de

$$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064$$

olur. Bunların dışında mükemmel sayı var mıdır? Bunlar nasıl bulunur? Herhangi bir örüntüye uyarlar mı? Bu sorular eski Yunan matematikçilerini cezbetmiştir. Şimdi Öklid tarafından kayda geçirilen ve bu soruları kısmen cevaplayan bir fikirden bahsedelim. Öklid bu iş için kümeleri[1] kullanmamış olsa da, biz onun fikirlerini kümeler dilini kullanarak ifade edelim.

[1] Kümeler teorisi, Öklid öldükten 2000 yıldan fazla bir süre sonra icat edilmiştir.

Amacımız hangi sayıların mükemmel olduğunu anlamaktır. Bunun için

$$P = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ mükemmel}\}$$

kümesini tanımlayalım. Buna göre $P = \{6, 28, 496, 8128, \ldots\}$ olur. Dikkat edilirse P kümesinin burada listelenen sayılar dışındaki elmanları belirsizdir. P kümesinin elemanları hakkında daha fazla bilgi edinebilmek için aşağıda verilen A kümesini inceleyeceğiz. Bu küme P kümesinden daha karmaşık görünse de, kısa bir süre sonra göreceğimiz üzere P'yi anlamak için çok yararlı olacaktır.

$$A = \{2^{n-1}(2^n - 1) : n \in \mathbb{N} \text{ ve } 2^n - 1 \text{ asal}\}.$$

Bir başka deyişle, $2^n - 1$ asal olmak üzere A kümesi $2^{n-1}(2^n - 1)$ formundaki doğal sayılardan oluşur. A kümesine ait olan sayılar hakkında bir fikir edinebilmek için aşağıdaki tabloya bakalım. Bu tablo her n doğal sayısına karşılık gelen 2^{n-1} ve $2^n - 1$ sayılarını listeler. Eğer $2^n - 1$ asalsa $2^{n-1}(2^n - 1)$ çarpımı tabloda verilmiştir; aksi halde bu kısım $*$ ile işaretlenmiştir.

n	2^{n-1}	$2^n - 1$	$2^{n-1}(2^n - 1)$
1	1	1	$*$
2	2	3	6
3	4	7	28
4	8	15	$*$
5	16	31	496
6	32	63	$*$
7	64	127	8128
8	128	255	$*$
9	256	511	$*$
10	512	1023	$*$
11	1024	2047	$*$
12	2048	4095	$*$
13	4096	8191	$33,550,336$

Dikkat edilirse A kümesinin ilk dört elamanı 6, 28, 496 ve 8128 mükemmel sayılarıdır. Bu noktada hemen $A = B$ sonucuna varmak isteyebilirsiniz. Ancak 2000 yıldan fazla bir süredir hiç kimsenin $A = P$ olup olmadığını belirleyememesi şok edici bir gerçektir. Sadece $A \subseteq P$ olduğu bilinmektedir ve şimdi biz bunu ispatlayacağız. Bir başka deyişle A kümesinin her elemanının mükemmel olduğunu göstereceğiz. (Yapacağımız bu ispat, P kümesinde olup da A kümesinde olmayan mükemmel sayıların var olma olasılığını açık bırakır.)

İspatın ana unsuru, ortak çarpanı r olan bir geometrik serinin toplam formülüdür. Muhtemelen en son Analiz II dersinde gördünüz bu formül

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

ile verilir. Özel olarak $r = 2$ durumu için ihtiyaç duyacağımız bu formül

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1. \tag{8.1}$$

şeklindedir. (Bu formülün bir ispatı için Bölüm 7.4'deki 19. alıştırmanın çözümüne bakabilirsiniz.) Şimdi bu sonucu kanıtlamak için hazırız. Bu sonucun önemine dikkat çekmek için bunu bir önermeden ziyade teorem olarak adlandıralım.

Teorem 8.1. *Eğer* $A = \{2^{n-1}(2^n-1) : n \in \mathbb{N}$ *ve* $2^n - 1$ *asal*$\}$ *ve* $P = \{p \in \mathbb{N} : p$ *mükemmel*$\}$ *ise* $A \subseteq P$ *olur.*

İspat. A ve P kümeleri yukarıdaki gibi tanımlansın. Buna göre $A \subseteq P$ olduğunu göstermek için $p \in A$ iken $p \in P$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $p \in A$ olsun. A kümesinin tanımına göre, n bir doğal sayı ve $2^n - 1$ bir asal sayı olmak üzere

$$p = 2^{n-1}(2^n - 1) \tag{8.2}$$

yazılabilir. Dikkat edilirse $2^n - 1$ asal olduğu için, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ olmak üzere $2^{n-1}(2^n-1)$ sayısının her böleni 2^k veya $2^k(2^n-1)$ formundadır. Buna göre p'nin pozitif bölenleri aşağıda listelenmiştir:

$$\begin{array}{llllll} 2^0, & 2^1, & 2^2, & \ldots & 2^{n-2}, & 2^{n-1}, \\ 2^0(2^n-1), & 2^1(2^n-1), & 2^2(2^n-1), & \ldots & 2^{n-2}(2^n-1), & 2^{n-1}(2^n-1). \end{array}$$

Dikkat edilirse bu liste $2^0 = 1$ ile başlar ve $2^{n-1}(2^n-1) = p$ ile biter.

Yukarıdaki listenin son elemanı (yani p) dışındaki diğer bölenlerini toplayarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + \sum_{k=0}^{n-2} 2^k\,(2^n-1) &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + (2^n-1)\sum_{k=0}^{n-2} 2^k \\ &= (2^n-1) + (2^n-1)\left(2^{n-1}-1\right) && \text{(Eşitlik 8.1)} \\ &= \left[1 + \left(2^{n-1}-1\right)\right](2^n-1) \\ &= 2^{n-1}\,(2^n-1) && \text{(Eşitlik 8.2)} \\ &= p \end{aligned}$$

buluruz. Buna göre p sayısının kendisinden farklı pozitif bölenlerinin toplamı p olur. Mükemmel sayı tanımına göre p mükemmeldir. Böylece P kümesinin tanımından $p \in P$ bulunur.

Sonuç olarak $p \in A$ iken $p \in P$ olduğunu gösterdik. Bu $A \subseteq P$ anlamına gelir. □

Bu teorem, bir önceki sayfadaki tablo ile birleştirildiğinde bize yeni bir mükemmel sayı verir! A kümesinin bir elemanı olan $p = 2^{13-1}(2^{13} - 1) = 33,550,336$ sayısı mükemmeldir.

Gözlemleneceği üzere A kümesinin her elemanı 2'nin bir kuvvetinin katıdır ve bu nedenle çifttir. Ama bu ille de her mükemmel sayının çift olacağı anlamına gelmez çünkü sadece $A \subseteq P$ gösterilmiştir fakat $A = P$ gösterilmemiştir. Tüm bildiğimiz A'da olmayıp $P - A$ kümesinde olabilme ihtimali olan tek mükemmel sayıların varlığıdır.

Hiç tek olan mükemmel sayı var mıdır? Kimse bu sorunun cevabını bilmemektedir.

2000 yıldan fazla bir süredir ne kimse tek olan bir mükemmel sayı bulabilmiş, ne de bunların olmadığını gösterebilmiştir. Fakat A kümesinin bütün *çift* mükemmel sayıları içerdiği bilinmektedir. Bu sonuç ilk defa Euler tarafından ispatlanmıştır. Biraz sonra, E bütün *çift* mükemmel sayıların kümesi olmak üzere $A = E$ olduğunu iddia eden teoremi *Euler*'in yolunu takip ederek ispatlayacağız. Bu örnek iki kümenin eşit olduğunun nasıl ispatlanacağını göstermek açısından iyi bir örnektir.

Kolaylık sağlamak açısınan mükemmel sayıların biraz farklı bir tanımını kullanalım ve bütün pozitif bölenlerinin toplamı $2p$ olan bir p doğal sayısına **mükemmel** sayı diyelim. Örneğin 6 mükemmeldir çünkü $1+2+3+6 = 2 \cdot 6$ olur. Bu tanım öncekinden daha sadedir çünkü burada pozitif bölenlerin p'den küçük olma şartı yoktur. Bunun yerine p son böleni eklenmektedir. Bu iş toplamı p kadar arttırır yani iki katına çıkarır.

Teorem 8.2. *Eğer* $A = \{2^{n-1}(2^n - 1) : n \in \mathbb{N} \text{ ve } 2^n - 1 \text{ asal}\}$ *ve* $E = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ mükemmel ve çift}\}$ *ise* $A = E$ *olur.*

İspat. $A = E$ olduğunu göstermek için $A \subseteq E$ ve $E \subseteq A$ gösterilmelidir. İlk önce $A \subseteq E$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $p \in A$ olsun. A kümesinin her elemanı 2'nin bir kuvvetinin katı olduğu için p çifttir. Buna ek olarak p mükemmeldir çünkü Teorem 8.1 gereğince A'nın her elemanı P'nin de bir elemanıdır ve bu nedenle p mükemmeldir. Buna göre p hem mükemmel hem de çift olduğu için $p \in E$ olur. Buradan $A \subseteq E$ bulunur.

Şimdi $E \subseteq A$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $p \in E$ olsun. Bu durumda p hem çift hem de mükemmeldir. Buna göre p tamsayısı $p = 2^k 3^{n_1} 5^{n_2} 7^{n_3} \cdots$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılabilir. Buradaki $n_1, n_2, n_3, \ldots$ kuvvetlerinden bazıları 0 olabilir. O halde $p = 2^k q$ olacak şekilde k pozitif tamsayısı ve q tek tamsayısı vardır. Buradaki amacımız $p \in A$ yani $p = 2^{n-1}(2^n - 1)$ formunda olduğunu göstermektir. Buna göre $p = 2^k q$ ifadesini bu forma benzetmek için $n = k+1$ seçerek

$$p = 2^{n-1} q \tag{8.3}$$

yazabiliriz. Şimdi q tamsayısının pozitif bölenlerinin $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_m$ ile gösterelim. (Burada $d_1 = 1$ ve $d_m = q$ olur.) Böylece p tamsayısının bölenleri

$$\begin{array}{ccccc} 2^0 d_1 & 2^0 d_2 & 2^0 d_3 & \ldots & 2^0 d_m \\ 2^1 d_1 & 2^1 d_2 & 2^1 d_3 & \ldots & 2^1 d_m \\ 2^2 d_1 & 2^2 d_2 & 2^2 d_3 & \ldots & 2^2 d_m \\ 2^3 d_1 & 2^3 d_2 & 2^3 d_3 & \ldots & 2^3 d_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2^{n-1} d_1 & 2^{n-1} d_2 & 2^{n-1} d_3 & \ldots & 2^{n-1} d_m \end{array}$$

olarak listelenebilir. Buna göre, p mükemmel olduğu için bu bölenlerin toplamı $2p$ olmalıdır ve Eşitlik 8.3 gereğince $2p = 2(2^{n-1})q = 2^n q$ yazılabilir. Yukarıdaki bölenler sütün sütün toplanarak

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k d_1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k d_2 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k d_3 + \cdots + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k d_m = 2^n q$$

bulunur. Bu toplama Eşitlik 8.1 uygulanarak

$$\begin{aligned} (2^n - 1)d_1 + (2^n - 1)d_2 + (2^n - 1)d_3 + \cdots + (2^n - 1)d_m &= 2^n q \\ (2^n - 1)(d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_m) &= 2^n q \\ d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_m &= \frac{2^n q}{2^n - 1} \end{aligned}$$

ve böylece

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_m = \frac{(2^n - 1 + 1)q}{2^n - 1} = \frac{(2^n - 1)q + q}{2^n - 1} = q + \frac{q}{2^n - 1}$$

elde edilir. Son eşitliğe göre $\frac{q}{2^n-1}$ bir tamsayı olmalıdır. O halde hem q hem de $\frac{q}{2^n-1}$ tamsayıları q'nun pozitif bölenleridir. Bu ikisinin toplamı q'nun *bütün* pozitif bölenlerinin toplamına eşit olduğu için q'nun sadece iki tane pozitif böleni vardır. Bunlar q ve $\frac{q}{2^n-1}$ ile verilir. Dikkat edilirse q'nun pozitif bölenlerinden bir tanesi 1 olmalıdır. Buradan $\frac{q}{2^n-1} = 1$ ve böylece $q = 2^n - 1$ bulunur. Bildiğimiz üzere, sadece iki tane pozitif böleni olan tamsayılar asaldır. Bu nedenle $q = 2^n - 1$ asal olmalıdır. Bu değer Eşitlik 8.3'de yerine yazılarak $p = 2^{n-1}(2^n - 1)$ bulunur. Bu, A kümesinin tanımından dolayı $p \in A$ olması anlamına gelir. O halde $p \in E$ ise $p \in A$ ve böylece $E \subseteq A$ olduğunu göstermiş oluruz.

Sonuç olarak $A \subseteq E$ ve $E \subseteq A$ olduğu için $A = E$ olmalıdır. □

Böyle bir ispatı kendi başınıza düşünemediyseniz hemen paniğe kapılmayın. Bu yaklaşımı keşfetmek Euler gibi birinin dehalığı gerektirir.

Bu üniteyi, mükemmel sayılar hakkında bazı gözlemler yaparak tamamlayalım.

- Altıncı mükemmel sayı $p = 2^{17-1}(2^{17} - 1) = 8589869056$ olur.
- Yedinci mükemmel sayı $p = 2^{19-1}(2^{19} - 1) = 137438691328$ olur.
- Sekizinci mükemmel sayı $p = 2^{31-1}(2^{31} - 1) = 2305843008139952128$ olur.
- Yirminci mükemmel sayı $p = 2^{4423-1}(2^{4423} - 1)$ olur. Bu sayı 2663 basamaklıdır.
- Yirmi üçüncü mükemmel sayı $p = 2^{11213-1}(2^{11213} - 1)$ olur. Bu sayı 6957 basamaklıdır.

Daha önce belirtildiği üzere tek ve mükemmel bir sayının var ya da yok olduğunu kimse bilmemektedir. Üstelik mükemmel sayıların sonlu ya da sonsuz çoklukta olup olmadığı bile bilinmemektedir. Ancak çift olan bir mükemmel sayının son rakamının 6 veya 8 **olduğu** bilinmektedir. Muhtemelen bunu kanıtlamak hoşuna gidebilir.

Mükemmel sayıların $2^n - 1$ formundaki asal sayılarla yakın bir ilişkisinin olduğunu gördük. Bu asal sayılara **Mersenne asalları** denir. Bu sayılara verilen isim, onları popüler yapan Fransız bilim adamı Marin Mersenne'den (1588-1648) gelir. İlk birkaç Mersenne asalı $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$ ve $2^9 - 1 = 8191$ ile verilir. Günümüze sadece 49 tane Mersenne asalının varolduğu bilinmektedir ve bunların en büyüğü $2^{74207281} - 1$ sayısıdır. Mersenne asallarından 50'ncisini bulana büyük bir para ödülü vaat edilmiştir. (Bkz. http://www.mersenne.org/prime.htm.) Muhtemelen alıştırmalar konusunda daha iyi bir şansınız olacaktır.

Alıştırmalar

Bu ünitede verilen metodları aşağıdaki önermeleri ispatlayınız.

1. $\{12n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{2n : n \in \mathbb{Z}\} \cap \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$ olduğunu ispatlayınız.
2. $\{6n : n \in \mathbb{Z}\} = \{2n : n \in \mathbb{Z}\} \cap \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$ olduğunu ispatlayınız.
3. Eğer $k \in \mathbb{Z}$ ise $\{n \in \mathbb{Z} : n \mid k\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z} : n \mid k^2\}$ olur.
4. Eğer $m, n \in \mathbb{Z}$ ise $\{x \in \mathbb{Z} : mn \mid x\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : m \mid x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} : n \mid x\}$ olur.
5. Eğer p, q pozitif tamsayılar ise $\{pn : n \in \mathbb{N}\} \cap \{qn : n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$ olur.
6. Kabul edelim ki A, B ve C üç küme olsun. Eğer $A \subseteq B$ ise $A - C \subseteq B - C$ olduğunu ispatlayınız.
7. Kabul edelim ki A, B ve C üç küme olsun. Eğer $B \subseteq C$ ise $A \times B \subseteq A \times C$ olur.
8. Eğer A, B ve C üç küme ise $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olur.

9. Eğer A, B ve C üç küme ise $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$ olur.
10. Eğer A ve B kümeleri U evrensel kümesinde ise $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ olur.
11. Eğer A ve B kümeleri U evrensel kümesinde ise $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ olur.
12. Eğer A, B ve C üç küme ise $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ olur.
13. Eğer A, B ve C üç küme ise $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ olur.
14. Eğer A, B ve C üç küme ise $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$ olur.
15. Eğer A, B ve C üç küme ise $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$ olur.
16. Eğer A, B ve C üç küme ise $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ olur.
17. Eğer A, B ve C üç küme ise $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ olur.
18. Eğer A, B ve C üç küme ise $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$ olur.
19. $\{9^n : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{3^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ancak $\{9^n : n \in \mathbb{Z}\} \neq \{3^n : n \in \mathbb{Z}\}$ olduğunu ispatlayınız.
20. $\{9^n : n \in \mathbb{Q}\} = \{3^n : n \in \mathbb{Q}\}$ olduğunu ispatlayınız.
21. Kabul edelim ki A ve B iki küme olsun. $A \subseteq B$ ancak ve ancak $A - B = \emptyset$ olduğunu ispatlayınız.
22. A ve B iki küme olsun. $A \subseteq B$ ancak ve ancak $A \cap B = A$ olduğunu ispatlayınız.
23. Her $a \in \mathbb{R}$ için $A_a = \{(x, a(x^2 - 1)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ olsun. Buna göre $\bigcap_{a \in \mathbb{R}} A_a = \{(-1, 0), (1, 0)\}$ olduğunu ispatlayınız.
24. $\bigcap_{x \in \mathbb{R}} [3 - x^2, 5 + x^2] = [3, 5]$ olduğunu ispatlayınız.
25. Kabul edelim ki A, B, C ve D dört küme olsun. $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$ olduğunu ispatlayınız.
26. $\{4k + 5 : k \in \mathbb{Z}\} = \{4k + 1 : k \in \mathbb{Z}\}$ olduğunu ispatlayınız.
27. $\{12a + 4b : a, b \in \mathbb{Z}\} = \{4c : c \in \mathbb{Z}\}$ olduğunu ispatlayınız.
28. $\{12a + 25b : a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$ olduğunu ispatlayınız.
29. Kabul edelim ki $A \neq \emptyset$ olsun. $A \times B \subseteq A \times C$ ancak ve ancak $B \subseteq C$ olduğunu ispatlayınız.
30. $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \cap (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olduğunu ispatlayınız.
31. Kabul edelim ki $B \neq \emptyset$ ve $A \times B \subseteq B \times C$ olsun. Buna göre $A \subseteq C$ olduğunu ispatlayınız.

Bölüm 9

Aksini İspat

Ünite 4'ten bu noktaya kadar şu ana temayı ele aldık: Verilen bir önermenin doğru olduğunu ispatlayınız. Her örnek ve alıştırmada bize doğru olan bir önerme verildi ve biz de bunu ispatlamaya çalıştık. Eğer ispatlamamız için yanlış bir önerme verilmiş olsaydı, ne olacağını hiç merak ettiniz mi? Bunun cevabı, hiçbir (doğru) ispatın mümkün olamayacağıdır. Eğer olsaydı bu önerme zaten yanlış değil, doğru olurdu.

Ama birilerini verilen bir önemenin yanlış olduğuna nasıl ikna edebilirsiniz? Bir önermeyi ispatlayamamak, o önermenin otomatik olarak yanlış olduğu anlamına gelmez. Sizin (ve belki de herkes) için ispatı yapmak çok zor olabilir. Aslında bir önermenin yanlış olduğunu ispatlamaya yarayan çok basit ve son derece de ikna edici bir yöntem vardır. Bu yöntemi uygulama prosedürü **aksini ispatlama** veya **çürütme** olarak adlandırılır. Bu nedenle, bu ünitede verilen bir önermenin **aksini ispatlamakla** ilgileneceğiz.

Bu yöntemi açıklamadan önce, arka planda ne olup bittiğine bir bakalım. Öncelikle, matematiksel önermeler aşağıdaki biçimde üç kategoride ayrılabilir.

Bir uçta, doğru oldukları ispatlanan önermelerin tamamından oluşan kategori vardır. Çoğunlukla bu önermeler yeterince kayda değerdir ve bunlara "teorem," "önerme," "lemma" ve "sonuç" isimleri verilir. Bu kategoride yer alan önermelerin bazıları bir sonraki sayfadaki şemanın sol tarafındaki kutuda listelenmiştir. Ayrıca bu kategoride ($2 = 2$ gibi) kesinlikle doğru olan önermeler de vardır. Bunların doğru oldukları herkes tarafından onaylanır fakat kimse bunlara "teorem" veya "önerme" gibi isimleri vermeye tenezzül etmez.

Bir diğer uçta, yanlış olduğu bilinen önermelerden oluşan kategori vardır. Bu kategorinin örnekleri şemanın sağ tarafında listelenmiştir. Matematikçiler bunlarla çok ilgilenmedikleri için bu türdeki önermelere geniş kapsamlı olan "yanlış önerme" ifadesi dışında özel bir isim verilmemiştir.

Fakat bu iki uç arasında üçüncü (ve oldukça da ilginç) bir kategori vardır. Bu kategori, doğru ya da yanlış olduğu tespit edilmeyen önermelerden oluşur. Bunların arasında *"Her mükemmel sayı çifttir."* veya *"İkiden büyük olan her çift tamsayı iki tane asal sayının toplamıdır."* gibi örnekler vardır. (İkinci ifade Goldbach sanısı olarak adlandırılır. Bunun için Bölüm 2.1'e bakınız.) Matematikçiler, bu kategoride olan ve doğru olduğunu tahmin ettikleri (ama henüz ispatlayamadıkları) ifadeler için özel bir isim kullanır. Bu türdeki bir ifadeye **sanı** denir.

Üç Önerme Türü

Doğru Olduğu Bilinenler (Teoremler & Önermeler)	**Doğru Olduğu Bilinmeyenler** (Sanılar)	**Yanlış Olduğu Bilinenler**
Örnekler: • Pisagor teoremi. • Fermat'ın son teoremi (Bölüm 2.1). • Bir tek sayının karesi tektir. • $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ serisi ıraksaktır.	Örnekler: • Bütün mükemmel sayılar çifttir. • İkiden büyük her çift tamsayı iki tane asal sayının toplamıdır (Goldbach sanısı, Bölüm 2.1). • $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $2^n - 1$ formunda sonsuz çoklukta asal sayı vardır.	Örnekler: • Bütün asal sayılar tektir. • İkinci dereceden bazı denklemlerin üç tane çözümü vardır. • $0 = 1$. • $a^3 + b^3 = c^3$ denklemini sağlayan a, b, c tamsayıları vardır.

Matematikçiler, zamanlarının ve enerjilerinin çoğunu sanıları ispatlamak ya da çürütmek için harcar. Ayrıca sezgiye veya toplanan bulgulara dayalı olarak yeni sanılar oluşturmak için de önemli miktarda zihinsel çaba harcamaktadırlar. Yeteri miktarda ilgi çekecek olan bir sanı ispatlandığında (ya da aksi ispatlandığında), ispat ya da aksinin ispatı genellikle bilimsel bir dergide yayınlanır. Eğer ispatlanırsa, bu sanı bir teorem ya da bir önerme statüsünü kazanır. Eğer çürütülürse önemini kaybeder çünkü matematikçiler yanlış ifadelerle ilgilenmez.

Matematikçileri ilgilendiren sanıların çoğunu ispatlamak ya da çürütmek oldukça zordur. Biz henüz o seviyede değiliz. Bu kitapta, karşılaşacağınız "sanılar" deneyimli bir matematikçinin baktığında hemen doğru veya yanlış olduğunu belirleyebileceği seviyededir fakat sizin ispat ya da aksinin ispatı için biraz uğraşmanız gerekebilir. Ancak ileri düzeydeki matematik sanılarını saran belirsizlik bulutuyla uyumlu kalarak, bu bölümdeki (ve onun ötesindeki) alıştırmaların doğruluğu veya yanlışlığı konusuna herhangi bir ipucu vermeden önermeleri ispatlamanız veya çürütmeniz istenecektir. Bunların doğru olup olmadığına karar vermek ve bunları ispatlamak veya çürütmek sizin işinizdir. Bu ünitedeki örnekler, bir önermenin doğru veya yanlış olduğuna karar vererek bunun ispatlanma yada çürütülme sürecini gösterecektir.

Bir önermeyi kanıtlamak için üç tane ana yöntem biliyoruz: doğrudan ispat, dolaylı ispat ve olmayana ergi. Şimdi bir önermenin aksini ispatlama yöntemini anlamak için hazırız. Bir P önermesinin aksini ispatlamak istediğimizi varsayalım. Bir başka deyişle P önermesinin *yanlış* olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Bunu yapmanın yolu $\sim P$ önermesini doğrulamaktır. Eğer $\sim P$ doğruysa bunu hemen P önermesinin yanlış olması izler.

Özet: P Önermesi Nasıl Çürütülür

$\sim P$ önermesi ispatlanır.

Bu yaklaşım son derece basittir. P önemesini çürütmek için $\sim P$ ispatlanır. Teorik olarak bu doğrudan ispat, dolaylı ispat veya olmayana ergi yöntemlerinden biriyle yapılabilir. Ancak pratikte, koşullu veya evrensel olarak nicelenmiş bir önerme ispatlarken işler biraz daha kolay olabilir. Bir sonraki konumuz bunla ilgilidir.

9.1 Evrensel Önermelerin Çürütülmesi: Aksine Örnek

Bir sanı, teorem olması ümit edilen önerme olarak düşünülebilir. Bilindiği üzere birçok teorem (dolayısıyla da birçok sanı) evrensel olarak nicelenmiş önermedir. Bu nedenle konuya evrensel nicelenmiş

$$\forall x \in S, P(x)$$

önermesinin nasıl çürütülebileceğini araştırarak başlayalım. Bu önermeyi çürütmek için değilini yani

$$\sim (\forall x \in S, P(x)) = \exists\, x \in S, \sim P(x)$$

ile verilen bir varlık önermesini ispatlamak gerekir. Bu varlık önermesini ispatlamak için $\sim P(x)$ önermesini doğrulayan yani $P(x)$ önermesini yanlış yapan bir $x \in S$ *örneği* üretilmelidir. Buna göre evrensel olarak nicelenmiş bir önermeyi çürütmek için yapılması gerekenler aşağıda özetlenmiştir.

Özet: $\forall x \in S, P(x)$ Önermesi Nasıl Çürütülür

$P(x)$ önermesini yanlış yapan bir $x \in S$ örneği üretilir.

Eğer aksi ispatlanmak istenen önerme $P(x) \Rightarrow Q(x)$ koşullu önermesi ise işler daha da kolaydır. Burada, $P(x)$ önermesini doğrulayan her x için $Q(x)$ önermesinin de doğru olacağı iddia edilmektedir. O halde $P(x)$ doğru fakat $Q(x)$ yanlış olacak şekilde bir x var ise bu koşullu önerme yanlıştır. Buna göre $P(x) \Rightarrow Q(x)$ koşullu önermesi aşağıdaki yöntem takip edilerek çürütülebilir.

Özet: $P(x) \Rightarrow Q(x)$ Önermesi Nasıl Çürütülür

$P(x)$ doğru fakat $Q(x)$ yanlış olacak şekilde bir x örneği üretilir.

Yukarıdaki özetlerin her ikisinde de, verilen önermeyi çürütmek için bu önermenin her zaman doğru olamayacağını gösteren bir örnek bulunur. (Burada önermeyi ispatlayan örnek, bozulabilecek bir yemin olarak düşünülebilir.) Bir önermeyi çürüten örneğin özel bir adı vardır: Buna **aksine örnek** denir.

Örnek 9.1. İlk örnek olarak aşağıdaki sanının doğru olup olmadığını belirleme sürecini inceleyelim.

Sanı. *Her* $n \in \mathbb{Z}$ *için* $n^2 - n + 11$ *tamsayısı asaldır.*

Bir sanının doğru ya da yanlış olduğunu belirlerken, sanı hakkında olabildiğince çok bilgi toplamak iyi bir fikirdir. Bu nedenle çeşitli n tamsayılarına karşılık, $f(n)$ ifadesinin alacağı değerleri gösteren bir tablo oluşturarak işe başlayalım:

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	23	17	13	11	11	13	17	23	31	41	53	67	83	101

Tablodaki her durumda $f(n)$ bir asal sayı olduğu için sanının doğru olduğu düşüncesine kapılabilirsiniz. İspatlamayı denemeden önce, bir tane daha n deneyelim. Ne yazık ki $f(11) = 11^2 - 11 + 11 = 11^2$ asal değildir. Bu nedenle sanı yanlıştır çünkü $n = 11$ aksine bir örnektir. Aksine ispat şu şekilde yapılabilir.

Aksini İspat. "*Her* $n \in \mathbb{Z}$ *için* $n^2 - n + 11$ *tamsayısı asaldır.*" önermesi **yanlıştır**. Dikkat edilirse $f(11) = 121 = 11 \cdot 11$ asal değildir. Bu nedenle $n = 11$ sayısı aksine bir örnektir. □

Bir önerme aksine bir örnekle çürütülürken, verilen örnek için önermenin neden yanlış olduğu tam olarak açıklanmalıdır. Yukarıda sadece "$n = 11$ *aksine bir örnektir*" yazılıp bırakılırsa ispat eksik kalır. Burada $f(11)$ cevabının asal olmadığını da göstermek gerekir. Bunun için $f(11) = 11 \cdot 11$ ayrışımını yazmak yeterlidir.

Örnek 9.2. Aşağıdaki sanının doğru ya da yanlış olduğunu gösteriniz.

Sanı. *Eğer* A, B *ve* C *üç küme ise* $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$ *olur.*

Aksini İspat. Bu önerme şu aksine örnek nedeniyle yanlıştır. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ ve $C = \{2, 3\}$ seçilirse $A - (B \cap C) = \{1, 3\}$ ve $(A - B) \cap (A - C) = \varnothing$ olur. Buna göre $A - (B \cap C) \neq (A - B) \cap (A - C)$ bulunur. □

(Bu aksine örneğin nereden geldiğini görmek için $A - (B \cap C)$ ve $(A - B) \cap (A - C)$ için Venn diyagramlarını çizdiğinizde, diyagramların farklı olduğunu göreceksiniz. Buna göre 1, 2 ve 3 sayılarını aksine örnek oluşturacak şekilde diyagramdaki bölgelere yerleştirebilirsiniz.)

9.2 Varlık Önermelerin Çürütülmesi

Sadece bir tane aksine örnek bularak evrensel olarak nicelenmiş bir önermeyi veya koşullu bir önermeyi çürütebileceğimizi gördük. Şimdi

$$\exists\, x \in S, P(x)$$

varlık önermesini çürütme problemini göz önüne alalım. Bu varlık önermesini ispatlamak için $P(x)$ önermesini doğrulayan bir x örneği bulunmalıdır. Bunu *çürütmek* için ise bunun olumsuzu olan $\sim (\exists\, x \in S, P(x)) = \forall x \in S, \sim P(x)$ önermesi ispatlanmalıdır. Dikkat edilirse olumsuzlaştırılan önerme evrensel olarak nicelenmiştir. Buna göre $\sim P(x)$ önermesinin *her* $x \in S$ için doğrulanması gerekir. Bu nedenle sadece bir tane örnek vermek yeterli değildir. Bunun yerine doğrudan ispat, dolaylı ispat veya olmayana ergi yöntemlerinden birini kullanarak *"Eğer $x \in S$ ise $\sim P(x)$."* koşullu önermesini kanıtlamamız gerekir. Şimdi, ispatlamak ya da çürütmek için aşağıdaki sanıyı verelim.

Örnek 9.3. Aşağıdaki sanının doğru ya da yanlış olduğunu gösteriniz.

Sanı. *Bir x reel sayısı $x^4 < x < x^2$ şartını sağlar.*

Bu iddia ilk bakışta mantıksız gelebilir. Buna karşılık önerme eğer $x^3 < x < x^2$ şartını sağlayan bir x reel sayısının varolduğunu iddia etseydi doğru olurdu çünkü $x = -2$ istenilen koşulu taşımaktadır. Fakat önerme $x^4 < x < x^2$ şartını sağlayan bir x reel sayısının var olduğunu iddia etmektedir. Böyle bir x sayısını bulmak için bazı zekice tahminler yapıldığında sorun çıkar. Örneğin $x = \frac{1}{2}$ için $x^4 < x$ olur fakat $x < x^2$ olmaz. Benzer şekilde $x = 2$ için $x < x^2$ olur fakat $x^4 < x$ olmaz. Buna göre $x^4 < x < x^2$ şartını sağlayan bir x reel sayısını bulmak zorlayıcıdır. Bu nedenle verilen önermenin yanlış olduğundan şüphelenmeye başlayabiliriz.

Şimdi bu önermeyi çürütebilir miyiz ona bir bakalım. Aksine ispat stratejisine göre, bu önermeyi *çürütmek* için bunun *olumsuzu* kanıtlanmalıdır. Bu önerme sembolik olarak $\exists\, x \in \mathbb{R}, x^4 < x < x^2$ şeklide olduğu için bunun olumsuzu

$$\sim \left(\exists\, x \in \mathbb{R}, x^4 < x < x^2\right) = \forall x \in \mathbb{R}, \sim \left(x^4 < x < x^2\right)$$

ile verilir. Bir başka deyişle bu önermenin olumsuzu şu şekildedir:

Her x reel sayısı için $x^4 < x < x^2$ ifadesi doğru değildir.

Bu, olmayana ergi yöntemiyle şu şekilde ispatlanır. Kabul edelim ki $x^4 < x < x^2$ şartını sağlayan bir x **var** olsun. Dikkat edilirse x, negatif olmayan x^4 sayısından büyük olduğu için, pozitiftir. Eğer $x^4 < x < x^2$ eşitsizliğindeki her terim x pozitif sayısı ile bölünürse $x^3 < 1 < x$ elde edilir. Buna göre $x^3 < 1 < x$ eşitsizliğindeki her terimden 1 çıkarılarak $x^3 - 1 < 0 < x - 1$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &< 0 < x - 1 \\ (x-1)(x^2 + x + 1) &< 0 < (x - 1) \\ x^2 + x + 1 &< 0 < 1 \end{aligned}$$

elde edilir. (Dikkat edilirse $x-1$ ile bölme işlemi eşitsizliğinin yönünü değiştirmez; çünkü yukarıdaki ikinci satır $0 < x - 1$ yani $x - 1$ sayısının pozitif olduğunu söyler.) Burada elde edilen $x^2 + x + 1 < 0$ eşitsizliği bir çelişkidir çünkü x pozitif olduğu için $x^2 + x + 1 > 0$ olmak zorundadır.

Yukarıda yaptığımız işi şu şekilde özetleyebiliriz: Verilen *"Bir x reel sayısı $x^4 < x < x^2$ şartını sağlar."* önermesi **yanlıştır** çünkü bunun olumsuzu olan *"Her x reel sayısı için $x^4 < x < x^2$ ifadesi doğru değildir."* önermesi ispatladık.

Alıştırmalar üzerinde çalışırken, her sanının yanlış olmak zorunda olmadığını unutmayın. Eğer bir sanı doğru ise bunun aksini ispatlamak mümkün değildir. Böyle bir durumda sanının doğru olduğuna dair bir ispat verilmelidir. Şimdi buna dair bir örnek inceleyelim.

Örnek 9.4. Aşağıdaki sanının doğru ya da yanlış olduğunu gösteriniz.

Sanı. *Her biri 1'den büyük olan, birbirlerine eşit olmayan ve $x^y = y^z$ eşitliğini sağlayan x, y, z tamsayıları vardır.*

Bu sanı doğrudur. Bir varlık önermesi şeklinde verilen bu sanıyı ispatlamak için istenilen şartları taşıyan x, y, z değerlerini vermek yeterlidir. Buna göre ispat şu şekildedir.

İspat. Eğer $x = 2$, $y = 16$ ve $z = 4$ seçilirse $x^y = 2^{16} = (2^4)^4 = 16^4 = y^z$ olur. □

9.3 Olmayana Ergi ile Çürütme

Olmayana ergi yöntemi, bir önermenin aksini ispatlamada çok kullanışlı olabilir. Bunun nasıl yapılacağını görmek için bir P önermesini çürütmek istediğimizi düşünelim. Bildiğimiz üzere, P önermesini çürütmek için $\sim P$ önermesini ispatlamamız gerekir. Olmayana ergi yöntemi ile $\sim P$ önermesini ispatlamak için ise $\sim\sim P$ önermesini doğru kabul ederek bir çelişkiye ulaşmamız gerekir. Ancak $\sim\sim P = P$ olduğu için bu iş, P önermesini doğru kabul ederek bir çelişkiye ulaşmakla aynıdır. Bunu şu şekilde özetleyebiliriz.

Özet: P Önermesi Olmayana Ergi ile Nasıl Çürütülür

P önermesi doğru kabul edilip bir çelişkiye ulaşılır.

Bu yöntemin nasıl uygulandığını göstermek için Örnek 9.5'te verilen sanıyı tekrar ele alalım ve bunu olmayana ergi yöntemiyle çürütelim. Burada yapacağımız iş büyük ölçüde Örnek 9.5'in tekrarıdır. Fakat burada, önermenin olumsuzlaştırılması gerekmediği için bu yöntemi uygulamak daha kolaydır.

Örnek 9.5. Aşağıdaki sanının yanlış olduğunu gösteriniz.

Sanı. *Bir x reel sayısı $x^4 < x < x^2$ şartını sağlar.*

Aksini İspat. Bu sanıyı olmayana ergi yöntemiyle çürütelim. Kabul edelim ki sanı doğru olsun. Buna göre $x^4 < x < x^2$ şartını sağlayan bir x reel sayısı vardır. Dikkat edilirse x, negatif olmayan x^4 sayısından büyük olduğu için, pozitiftir. Eğer $x^4 < x < x^2$ eşitsizliğindeki her terim x pozitif sayısı ile bölünürse $x^3 < 1 < x$ elde edilir. Buna göre $x^3 < 1 < x$ eşitsizliğindeki her terimden 1 çıkarılarak $x^3 - 1 < 0 < x - 1$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &< 0 < x - 1 \\ (x-1)(x^2+x+1) &< 0 < (x-1) \\ x^2 + x + 1 &< 0 < 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada elde edilen $x^2 + x + 1 < 0$ eşitsizliği bir çelişkidir çünkü x pozitiftir. O halde verilen sanı yanlıştır. $\square$

Alıştırmalar

Aşağıdaki her önerme ya doğrudur ya da yanlıştır. Eğer önerme doğruysa ispatlayınız, yanlış ise çürütünüz. Buradaki alıştırmalar kümülatiftir ve Üniteler 1-9 arasında verilen tüm konuları kapsar.

1. Eğer $x, y \in \mathbb{R}$ ise $|x + y| = |x| + |y|$ olur.
2. Her n doğal sayısı için $2n^2 - 4n + 31$ asaldır.
3. Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ve $n^5 - n$ çift ise n çifttir.
4. Her n doğal sayısı için $n^2 + 17n + 17$ tamsayısı asaldır.
5. Eğer A, B, C ve D dört küme ise $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$ olur.
6. Eğer A, B, C ve D dört küme ise $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ olur.
7. Eğer A, B, C üç küme ve $A \times C = B \times C$ ise $A = B$ olur.
8. Eğer A, B, C üç küme ve $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$ olur.

9. Eğer A ve B iki küme ise $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A - B)$ olur.
10. Eğer A ve B iki küme ve $A \cap B = \varnothing$ ise $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A - B)$ olur.
11. Eğer $a, b \in \mathbb{N}$ ise $a + b < ab$ olur.
12. Eğer $a, b, c \in \mathbb{N}$ ve ab, bc ve ac çarpımlarının hepsi aynı pariteye sahip ise a, b ve c sayılarının tamamı aynı paritelidir.
13. $\mathbb{R} \subseteq X$ ve $\varnothing \in X$ olcak şekilde bir X kümesi vardır.
14. Eğer A ve B iki küme ise $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ olur.
15. Her tek tamsayı üç tane tek tamsayının toplamıdır.
16. Eğer A ve B sonlu iki küme ise $|A \cup B| = |A| + |B|$ olur.
17. Her A ve B kümesi için eğer $A - B = \varnothing$ ise $B = \varnothing$ olur.
18. Eğer $a, b, c \in \mathbb{N}$ ise $a - b$, $a + c$ ve $b - c$ sayılarından en az biri çifttir.
19. Eğer $r, s \in \mathbb{Q}$ ve $r < s$ ise $r < u < s$ olacak şekilde bir u irrasyonel sayısı vardır.
20. $1000 = p - q$ olacak şekilde p ve q asal sayıları vardır.
21. $97 = p - q$ olacak şekilde p ve q asal sayıları vardır.
22. Eğer p ile q iki asal sayı ve $p < q$ ise $2p + q^2$ tektir.
23. Eğer $x, y \in \mathbb{R}$ ve $x^3 < y^3$ ise $x < y$ olur.
24. Her x reel sayısı için $2^x \geqslant x + 1$ eştisizliği doğrudur.
25. Her $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için eğer $a \mid bc$ ise $a \mid b$ veya $a \mid c$ olur.
26. Kabul edelim ki A, B ve C üç küme olsun. Eğer $A = B - C$ ise $B = A \cup C$ olur.
27. $2^x = x^2$ denkleminin üç tane reel sayı çözümü vardır.
28. Kabul edelim ki $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer $a \mid b$ ve $b \mid a$ ise $a = b$ olur.
29. Eğer $x, y \in \mathbb{R}$ ve $|x + y| = |x - y|$ ise $y = 0$ olur.
30. $42a + 7b = 1$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır.
31. Pascal üçgeninde (1'den farklı) hiçbir sayı dörtten fazla sayıda bulunmaz.
32. Eğer $n, k \in \mathbb{N}$ ve $\binom{n}{k}$ asal ise $k = 1$ veya $k = n - 1$ olmalıdır.

33. Kabul edelim ki $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ katsayılarının tamamı doğal sayılar ve derecesi 1 veya daha büyük olan bir polinom olsun. Bu durumda $f(n)$ asal olmayacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

34. Eğer $X \subseteq A \cup B$ ise $X \subseteq A$ veya $X \subseteq B$ olur.

Bölüm 10

Matematiksel Tümevarım

Bu ünitede, **matematiksel tümevarım** (ya da kısaca **tümevarım**) adı verilen çok kuvvetli bir ispat yöntemini inceleyeceğiz. Bu yöntemi açıklamak için öncelikle tümevarımla ispatlanan önerme çeşitlerine bakalım. Aşağıdaki önermeyi göz önüne alalım.

Sanı. *İlk n tek doğal sayının toplamı n^2 olur.*

Bu sanıda verilen ifade aşağıdaki tabloda görselleştirilmiştir. Tablonun her satırı n doğal sayısı ile başlar ve bunu ilk n tane tek doğal sayının toplamı takip eder. Her satır n^2 ile biter.

n	İlk n tane tek doğal sayının toplamı	n^2
1	$1 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	1
2	$1+3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	4
3	$1+3+5 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	9
4	$1+3+5+7 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$	16
5	$1+3+5+7+9 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$	25
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$1+3+5+7+9+11+\cdots+(2n-1) = \dots\dots$	n^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

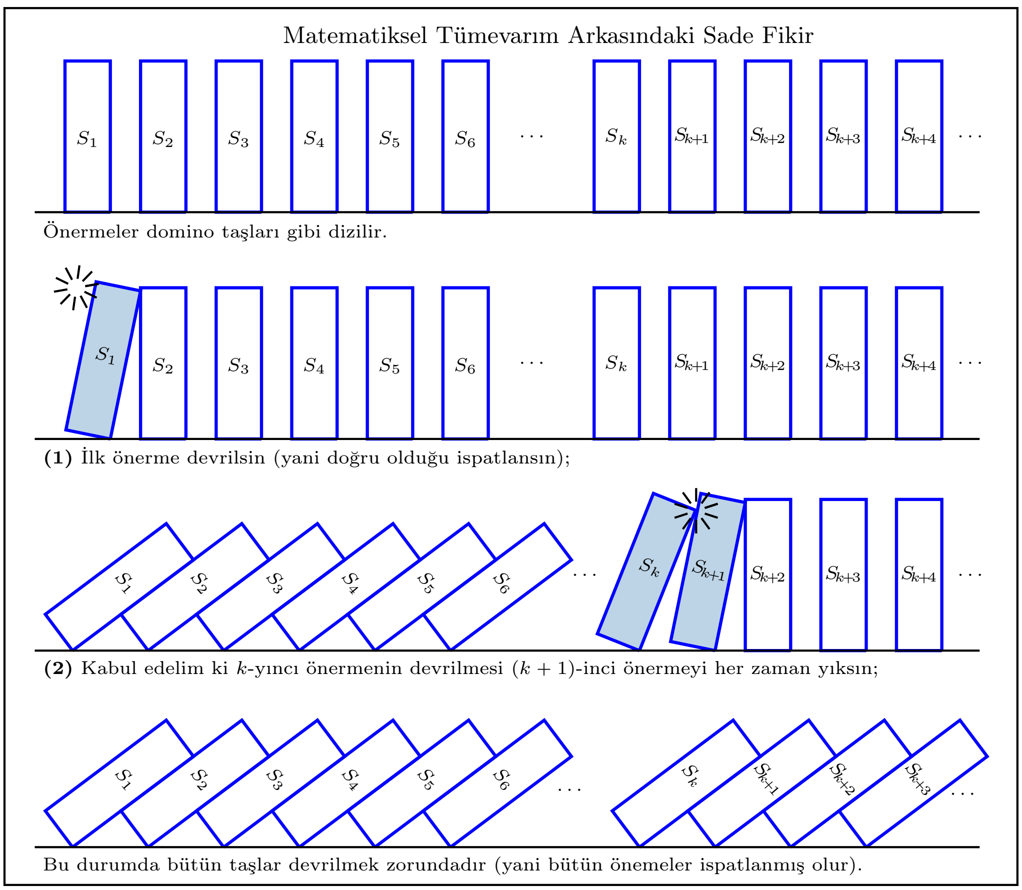
Tablonun ilk beş satırına dikkatlice bakılırsa gerçekten de bu satırlardaki ilk n tek doğal sayının toplamı n^2 olur. Üstelik ilk beş satır, $n-$yinci sıradaki tek doğal sayının (her toplamdaki son sayı) $2n-1$ olduğuna işaret eder. (Örneğin $n = 2$ ise ikinci tek doğal sayı $2 \cdot 2 - 1 = 3$ ve $n = 3$ ise üçüncü tek doğal sayı $2 \cdot 3 - 1 = 5$ vb. olur.)

Bu tablo şu soruyu akla getirir: $1+3+5+7+9+11+\cdots+(2n-1)$ toplamı her zaman gerçekten de n^2 midir? Bir başka deyişle verilen sanı doğru mudur?

Şimdi bu soruyu farklı bir şekilde ifade edelim. Her n doğal sayısına (yani tablonun her satırına) karşılık, S_n önermesi aşağıdaki şekilde verilsin:

$$
\begin{aligned}
&S_1 : 1 = 1^2\\
&S_2 : 1 + 3 = 2^2\\
&S_3 : 1 + 3 + 5 = 3^2\\
&\quad\vdots\\
&S_n : 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2\\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

Buradaki soru şudur: Bu önermelerin hepsi doğru mudur?



Matematiksel tümevarım, bu tipteki soruları cevaplamak için dizayn edilmiştir. Bu yöntem $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ önermelerinden oluşan bir kümedeki bütün önermelerin doğru olduğunu ispatlamak için kullanılır. Bu metod gerçekten de çok sadedir. Bu yöntemi görsel olarak ifade etmek için önermelerin sıraya dizilmiş domino taşları olduğunu hayal edelim. Buna göre S_1 önermesini ispatladığımızı düşünelim ve bunu S_1 domino taşınının devrilmesi ile sembolize edelim. Buna ek olarak, herhangi bir S_k önermesinin doğru olmasının (devrilmesinin) S_{k+1} önermesinin doğru olmasını (devrilmesini) gerektireceğini hayal edelim. Buna göre S_1 devrilerek S_2'yi yıkar. Bundan sonra S_2 devrilerek S_3'ü yıkar, S_3 devrilerek S_4'ü yıkar ve süreç bu şekilde devam eder. Bunun kaçınılmaz bir sonucu olarak bütün önermeler devrilir (yani doğru oldukları ispatlanır).

Yukarıdaki şekil *matematiksel tümevarım ile ispatın* ana hatlarını verir.

Özet: Tümevarım ile İspat Yöntemi

Önerme. $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$ *önermelerinin tamamı doğrudur.*

İspat. (Tümevarım).

(1) İlk önce S_1 önermesinin doğru olduğu ispatlanır.

(2) Verilen her $k \geqslant 1$ için $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ önermesi ispatlanır.

Matematiksel tümevarım yöntemine göre her S_n önermesi doğrudur. □

Buradaki ilk (1) adım **başlangıç adımı** olarak adlandırılır. Genel olarak S_1 önermesi çok basit olduğu için bu adımı ispatlamak oldukça kolaydır. İkinci (2) adım **tümevarım adımı** olarak adlandırılır. Tümevarım adımındaki $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ önermesi çoğu zaman doğrudan ispat yöntemiyle kanıtlanır. Bunun için S_k önermesinin doğru olduğu kabul edilir ve S_{k+1} önermesinin doğru olması gerektiği gösterilir. Burada, S_k önermesinin doğru olduğu varsayımına **tümevarım hipotezi** denir.

Şimdi bu yöntemi, yukarıda verilen ve ilk n tane tek doğal sayının toplamının n^2 olduğunu iddia eden sanıya uygulayalım. Amacımız, her $n \in \mathbb{N}$ için $S_n : 1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2$ önermesinin doğru olduğunu göstermektir. Başlamadan önce, S_n önermesinde n yerine k yazılarak S_k önermesinin elde edileceği görülebilir. Buna göre S_k önermesi $S_k : 1+3+5+7+\cdots+(2k-1) = k^2$ şeklindedir. Buna ek olarak, n yerine $k+1$ yazılarak $S_{k+1} : 1+3+5+7+\cdots+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$ önermesi elde edilir.

Önerme. *Eğer* $n \in \mathbb{N}$ *ise* $1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2$ *olur.*

İspat. Bunu matematiksel tümevarım yöntemiyle ispatlayalım.

(1) Görüleceği üzere bu önerme, $n = 1$ için $1^2 = 1$ halini alır. Bunun doğru olduğu açıktır.

(2) Şimdi her $k \geqslant 1$ için $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ olduğunu yani $1+3+5+7+\cdots+(2k-1) = k^2$ ise

$1+3+5+7+\cdots+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$ olduğunu göstermeliyiz. Bu işi doğrudan ispat yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $1+3+5+7+\cdots+(2k-1)=k^2$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
1+3+5+7+\cdots\cdots\cdots\cdots+(2(k+1)-1) &= \\
1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1) &= \\
\big(1+3+5+7+\cdots+(2k-1)\big)+(2(k+1)-1) &= \\
k^2+(2(k+1)-1) &= k^2+2k+1 \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Buna göre $1+3+5+7+\cdots+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$ elde edilir. Böylece $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ önermesi ispatlanmış olur.

Tümevarım yöntemine göre, her $n \in \mathbb{N}$ için $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$ elde edilir. $\square$

Tümevarım ispatlarındaki S_1 önermesi genellikle 1 doğal sayısı ile indislenmiştir ancak bu her zaman böyle olmak zorunda değildir. Probleme bağlı olarak, ilk önerme S_0 ya da S_m olabilir. Burada m başka bir tamsayıdır. Bir sonraki örneğimizde $S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots$ önermeleri verilecektir. Bunu ispatlarken yukarıda verilen ana çerçeve korunur fakat başlangıç adımında S_1 yerine S_0 doğrulanır.

Önerme. *Eğer n negatif olmayan bir tamsayı ise $5 \mid (n^5-n)$ olur.*

İspat. Bu önermeyi matematiksel tümevarım yöntemiyle ispatlayalım. Negatif olmayan ilk tamsayı 0 olduğu için başlangıç adımı $n=0$ için ispatlanmalıdır.

(1) Eğer $n=0$ ise bu önerme $5 \mid (0^5-0)$ ya da $5 \mid 0$ ile verilir. Bunun doğru olduğu açıktır.

(2) Şimdi $k \geqslant 0$ olsun. Eğer $5 \mid (k^5-k)$ ise $5 \mid \big((k+1)^5-(k+1)\big)$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $5 \mid (k^5-k)$ olsun. Buna göre $k^5-k=5a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned}
(k+1)^5-(k+1) &= k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1-k-1 \\
&= (k^5-k)+5k^4+10k^3+10k^2+5k \\
&= 5a+5k^4+10k^3+10k^2+5k \\
&= 5(a+k^4+2k^3+2k^2+k)
\end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Buna göre $(k+1)^5-(k+1)$ ifadesi 5'in bir tamsayı katıdır. Böylece $5 \mid \big((k+1)^5-(k+1)\big)$ bulunur. O halde $5 \mid (k^5-k)$ ise $5 \mid \big((k+1)^5-(k+1)\big)$ olur.

Tümevarım yöntemine göre, negatif olmayan her n tamsayısı için $5 \mid (n^5-n)$ olur. $\square$

Belirtildiği üzere, tümevarım yöntemi $\forall n \in \mathbb{N}, S_n$ formundaki önermeleri ispatlamak için kullanılır. Dikkat edilirse ana hatları yukarıda çizilen bu yöntem $\forall n \in \mathbb{Z}, S_n$ formundaki önermelerde *çalışmaz* (burada n sayısı $\mathbb{N}$ yerine $\mathbb{Z}$ kümesindedir). Bunun sebebi $\forall n \in \mathbb{N}, S_n$ önermesi tümevarımla ispatlanırken, S_1 önermesinin doğru ve $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ olduğu gösterilir. Buradan sadece S_n önermesinin her $n \geqslant 1$ için doğru olduğu sonucu çıkar. Fakat $S_0, S_{-1}, S_{-2}, \ldots$ önermelerinin doğru olmasına dair herhangi birşey ispatlanmamıştır. Eğer $\forall n \in \mathbb{Z}, S_n$ önermesini tümevarımla ispatlamak istiyorsanız, bir S_a önermesinin doğru olduğunu ve $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ **ve** $S_k \Rightarrow S_{k-1}$ olduğunu göstermeniz gerekir.

Ne yazık ki *matematiksel tümevarım* terimi bazen bir şeyin benzer koşullar altında yapılan önceki gözlemlere dayanarak doğru olabileceği sonucuna varma süreci anlamına gelen *tümevarımsal akıl yürütme* ile karıştırılır. Burada belirtildiği gibi matematiksel tümevarımın, önermeleri mutlak bir kesinlikle ispatlayan, ciddi bir ispat yöntemi olduğunu unutmayınız.

Bu bölümü toparlamak için dört tane daha tümevarım ile ispat yapalım.

Önerme. *Eğer* $n \in \mathbb{Z}$ *ve* $n \geqslant 0$ *ise* $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$ *olur.*

İspat. Bu ispatı matematiksel tümevarım ile yapalım.

(1) Eğer $n = 0$ ise bu önerme

$$\sum_{i=0}^{0} i \cdot i! = (0+1)! - 1$$

şeklindedir. Bu eşitliğin sol tarafı $0 \cdot 0! = 0$, sağ tarafı da $1! - 1 = 0$ olduğu için bunlar eşittir. Buna göre $\sum_{i=0}^{0} i \cdot i! = (0+1)! - 1$ eşitliği sağlanır.

(2) Şimdi herhangi bir $k \geqslant 0$ sayısını ele alalım. Burada S_k önermesinin S_{k+1} önermesini gerektirdiğini göstermeliyiz. Bir başka ifadeyle

$$\sum_{i=0}^{k} i \cdot i! = (k+1)! - 1$$

eşitliğinin

$$\sum_{i=0}^{k+1} i \cdot i! = ((k+1)+1)! - 1$$

eşitliğini gerektirdiğini göstermeliyiz. Bu işi doğrudan ispat yöntemiyle yapalım. Bunun için

$\sum_{i=0}^{k} i \cdot i! = (k+1)! - 1$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i \cdot i! &= \sum_{i=0}^{k} i \cdot i! + (k+1)(k+1)! \\
&= \big((k+1)! - 1\big) + (k+1)(k+1)! \\
&= (k+1)! + (k+1)(k+1)! - 1 \\
&= \big(1 + (k+1)\big)(k+1)! - 1 \\
&= (k+2)(k+1)! - 1 \\
&= (k+2)! - 1 \\
&= ((k+1)+1)! - 1
\end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Buna göre $\displaystyle\sum_{i=0}^{k+1} i \cdot i! = ((k+1)+1)! - 1$ elde edilir.

Tümevarım yöntemine göre, her $n \geqslant 0$ için $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$ olur. □

Şimdi çözeceğimiz örnek, bazı durumlarda faydalı olabilecek bir püf noktasını gösterir. Bilindiği üzere, bir eşitliğin her iki tarafına aynı miktarda ekleme yapılması eşitliği bozmaz. Fakat bir *eşitsizliğin* her iki tarafına *farklı* miktarlarda ekleme yapıldığında, büyük olan tarafa eklenen miktar küçük olan tarafa eklenenden daha fazla olduğu sürece eşitsizliğin bozulmayacağı unutulmamalıdır. Örneğin, $x \leqslant y$ ve $a \leqslant b$ ise $x + a \leqslant y + b$ olur. Benzer şekilde $x \leqslant y$ ve b pozitif ise $x \leqslant y + b$ olur. Sıklıkla unutulan bu sonuç bir sonraki ispatta kullanılacaktır.

Önerme. *Her $n \in \mathbb{N}$ için $2^n \leqslant 2^{n+1} - 2^{n-1} - 1$ olur.*

İspat. Bu ispatı matematiksel tümevarımla yapalım.

(1) Eğer $n = 1$ ise bu önerme $2^1 \leqslant 2^{1+1} - 2^{1-1} - 1$ yani $2 \leqslant 4 - 1 - 1$ halini alır. Bunun doğru olduğu açıktır.

(2) Şimdi $k \geqslant 1$ olsun. Buna göre $2^k \leqslant 2^{k+1} - 2^{k-1} - 1$ ise $2^{k+1} \leqslant 2^{(k+1)+1} - 2^{(k+1)-1} - 1$ olduğunu göstermeliyiz. Bu işi doğrudan ispat yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $2^k \leqslant 2^{k+1} - 2^{k-1} - 1$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
2^k &\leqslant 2^{k+1} - 2^{k-1} - 1 \\
2\left(2^k\right) &\leqslant 2\left(2^{k+1} - 2^{k-1} - 1\right) && \text{(eşitsizliğin her iki tarafı 2 ile çarpılmıştır)} \\
2^{k+1} &\leqslant 2^{k+2} - 2^k - 2 \\
2^{k+1} &\leqslant 2^{k+2} - 2^k - 2 + 1 && \text{(eşitsizliğin büyük tarafına 1 eklenmiştir)} \\
2^{k+1} &\leqslant 2^{k+2} - 2^k - 1 \\
2^{k+1} &\leqslant 2^{(k+1)+1} - 2^{(k+1)-1} - 1
\end{aligned}$$

olduğu görülebilir.

Tümevarım yöntemine göre her $n \in \mathbb{N}$ için $2^n \leqslant 2^{n+1} - 2^{n-1} - 1$ elde edilir. □

Bundan sonraki örneğimizde, eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ eşitsizliğinin $x > -1$ şartını sağlayan her $x \in \mathbb{R}$ için doğru olduğunu göstereceğiz. Bir başka deyişle,

$$S_n : x > -1 \text{ şartını sağlayan her } x \in \mathbb{R} \text{ için } (1+x)^n \geqslant 1+nx$$

önermesinin her n doğal sayısı için doğru olduğunu göstereceğiz. $P(n)$ ifadesi n doğal sayısı hakkında bir önerme olmak üzere, bu örnek daha önce ispatladığımız $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ formundaki örneklerden (sadece) biraz daha farklıdır. Bu sefer ispatlayacağımız önerme

$$\forall x \in \mathbb{N}, P(n,x)$$

formundadır. Buradaki $P(n,x)$ önermesi sadece n sayısını değil, aynı zamanda x değişkenini de içerir. (Kayıtlara geçmesi açısından $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ eşitsizliği *Bernoulli eşitsizliği* olarak bilinir.)

Önerme. *Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $x > -1$ şartını sağlayan her $x \in \mathbb{R}$ için $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ olur.*

İspat. Bu ispatı matematiksel tümevarım yöntemiyle yapalım.

(1) Başlangıç adımı olarak, $n = 1$ için bu önerme $(1+x)^1 \geqslant 1 + 1 \cdot x$ ile verilir. Bu ifadenin her iki tarafı da $1+x$ olduğu için bu eşitsizlik doğrudur.

(2) Şimdi $k \geqslant 1$ olsun. Kabul edelim ki $x > -1$ şartını sağlayan her $x \in \mathbb{R}$ için $(1+x)^k \geqslant 1+kx$ önermesi doğru olsun. Buna göre $(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x$ olduğunu ispatlamalıyız. Dikkat edilirse $x > -1$ olduğu için $1+x$ pozitiftir. O halde $(1+x)^k \geqslant 1+kx$ eşitsizliğinin her iki

tarafı $1 + x$ ile çarpıldığında eşitsizliğin yönü değiştirmez. Buradan

$$\begin{aligned}(1+x)^k(1+x) &\geqslant (1+kx)(1+x)\\ (1+x)^{k+1} &\geqslant 1+x+kx+kx^2\\ (1+x)^{k+1} &\geqslant 1+(1+k)x+kx^2\end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Son eşitsizlikteki kx^2 terimi pozitif olduğu için bu terimin eşitsizliğin sağ tarafından çıkarılması bu tarafı küçültür. Böylece $(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x$ elde edilir.

□

Bir sonraki örneğimizde, başlangıç adımı rutin bir kontrolden fazlasını içerir. (Bu örneği daha sonra kullanacağımız için buna bir numara verelim.)

Önerme 10.1. *Kabul edelim ki $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ile n birer tamsayı ve $n \geqslant 2$ olsun. Eğer p bir asal sayı ve $p \mid (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n)$ ise en az bir a_i için $p \mid a_i$ olmalıdır.*

İspat. Bu önermeyi n üzerine tümevarım uygulayarak ispatlayalım.

(1) Başlangıç adımı $n = 2$ için ispatlanmalıdır. Bunun için p bir asal sayı olmak üzere $p \mid (a_1a_2)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $p \mid a_1$ veya $p \mid a_2$ ya da buna denk olarak eğer $p \nmid a_1$ ise $p \mid a_2$ olması gerektiği gösterilmelidir. Şimdi, $p \nmid a_1$ olduğunu kabul edelim. Dikkat edilirse p asal olduğu için $\mathrm{ebob}(p, a_1) = 1$ olur. Önerme 7.1'den (sayfa 150) $1 = pk + a_1l$ olacak şekilde k ve l tamsayıları vardır. Bu eşitliğin her iki tarafı a_2 ile çarpılarak

$$a_2 = pka_2 + a_1a_2l$$

bulunur. Kabulümüze göre p asalı a_1a_2 sayısını böler. Buna p asalının eşitliğin sağ tarafındaki $pka_2 + a_1a_2l$ ifadesini böleceği açıktır. Buradan $p \mid a_2$ bulunur. Böylece, eğer $p \mid (a_1a_2)$ ise $p \mid a_1$ veya $p \mid a_2$ olduğunu ispatladık. Bu, başlangıç adımını tamamlar.

(2) Şimdi $k \geqslant 2$ olsun. Kabul edelim ki $p \mid (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_k)$ olması en az bir tane a_i için $p \mid a_i$ olmasını gerektirsin. Buradan $p \mid \big((a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_k) \cdot a_{k+1}\big)$ yazılabilir. Buna göre, başlangıç adımında ispatladığımız sonuçtan dolayı $p \mid (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_k)$ veya $p \mid a_{k+1}$ olmalıdır. Bu, tümevarım hipoteziyle birlikte p asalının a_i tamsayılarından birini bölmesi gerektiğini söyler.

□

Şimdi birkaç alıştırma üzerinde çalışarak ne kadar anladığınızı lütfen test edin.

10.1 Güçlü Tümevarım

Bu bölümde tümevarım yönteminin farklı bir versiyonunu inceleyeceğiz..

Bazı tümevarım ispatlarında, S_k doğru iken S_{k+1} önermesinin de doğru olduğunu göstermek zor olabilir. Bunun yerine, S_{k+1} önermesini doğrulamak için ($m < k$ olmak üzere) daha "önceki" bir S_m önermesini kullanma ihtiyacı duyabilirsiniz. Böyle durumlarda, tümevarım yönteminin biraz daha değişik bir versiyonu olan güçlü tümevarım yöntemi kullanılabilir. Güçlü tümevarım, bildiğimiz tümevarım yöntemi gibi çalışır. Aradaki tek fark, ikinci adımda S_k önermesini doğru kabul edip bunun S_{k+1} önermesini gerektireceğinin gösterilmesi yerine $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k$ önermelerinin *hepsini* doğru kabul edip bunların S_{k+1} önermesini gerektireceği gösterilir. Buradaki ana fikir şudur: Eğer ilk k sıradaki domino taşlarının devrilmesi her zaman $(k+1)-$inci domino taşını yıkıyorsa bütün domino taşları yıkılmalıdır. Bu yöntemin ana hatları şu şekildedir.

Özet: Güçlü Tümevarım ile İspat Yöntemi

Önerme. $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$ *önermelerinin tamamı doğrudur.*

İspat. (Güçlü tümevarım).

(1) S_1 önermesinin doğru olduğu ispatlanır. (Ya da ilk birkaç S_n ispatlanır.)

(2) Verilen her $k \geqslant 1$ için $(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge \cdots \wedge S_k) \Rightarrow S_{k+1}$ önermesi ispatlanır.

□

Güçlü tümevarım yöntemi, S_k önermesini doğru kabul ederek bunun akıcı bir şekilde S_{k+1} önermesini gerektirdiğinin gösterilemediği durumlarda kullanışlıdır. S_{k+1} önermesinin doğru olduğunu göstermek için bir başka önerme (örneğin S_{k-2} veya S_{k-1}) daha çok işe yarayabilir. Güçlü tümevarım yöntemi bize S_{k+1} önermesini kanıtlamak için $S_1, S_2, \ldots, S_k$ önermelerinde herhangi birini (ya da hepsini) kullanabileceğimizi söyler.

Güçlü tümevarımın ilk örneği olarak, her $n \in \mathbb{N}$ için $12 \mid (n^4 - n^2)$ olduğunu ispatlayalım. Fakat ilk önce, sıradan tümevarım yöntemini kullandığımızda ortaya çıkacak problemi görelim. Sıradan tümevarım yönteminde işe $12 \mid (n^4 - n^2)$ ifadesinin $n = 1$ için doğru olduğunu göstererek başlarız. Bunu göstermek kolaydır çünkü $n = 1$ için bu önerme $12 \mid 0$ ifadesine indirgenir ve bunun doğru olduğu açıktır. Bundan sonra, $12 \mid (k^4 - k^2)$ olduğunu kabul ederek $12 \mid \big((k+1)^4 - (k+1)^2\big)$ olduğunu göstermemiz gerekir. Şimdi, $12 \mid (k^4 - k^2)$ ifadesine göre $k^4 - k^2 = 12a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu bilgiyi kullanarak $(k+1)^4 - (k+1)^2 = 12b$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ var olduğunu göstermemiz gerekir. Buna göre, $(k+1)^4 - (k+1)^2$ ifadesini açarak

$$\begin{aligned}(k+1)^4 - (k+1)^2 &= (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) - (k^2 + 2k + 1) \\ &= (k^4 - k^2) + 4k^3 + 6k^2 + 6k \\ &= 12a + 4k^3 + 6k^2 + 6k\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ifadeyi 12 parantezine alamayacağımız için bu noktada tıkanıp kalırız. Şimdi güçlü tümevarımın bizi bu tıkanıklıktan nasıl çıkaracağını görelim.

Güçlü tümevarım yöntemi $S_1, S_2, \ldots, S_k$ önermelerinden her birinin doğru olduğunu kabul edip bunların S_{k+1} önermesini gerektireceğinin gösterilmesinden oluşur. Özellikle, S_1'den S_k'ya bütün önermeler doğruysa $1 \leqslant k-5 < k$ olmak şartıyla S_{k-5} önermesi de kesinlikle doğrudur. Buradaki ana fikir, $S_k \Rightarrow S_{k+1}$ yerine $S_{k-5} \Rightarrow S_{k+1}$ olduğunu göstermektir. Bunun mantıklı olması için başlangıç adımında $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ önermelerinin hepsinin doğru olduğu kontrol edilmelidir. Bu iş yapıldıktan sonra, $S_{k-5} \Rightarrow S_{k+1}$ önermesi diğer bütün S_k önermelerinin doğru olduğunu söyler. Örneğin $k = 6$ ise $S_{k-5} \Rightarrow S_{k+1}$ önermesi $S_1 \Rightarrow S_7$ halini alır ve bu nedenle S_7 doğrudur. Buna göre, $k = 7$ için $S_{k-5} \Rightarrow S_{k+1}$ önermesi $S_2 \Rightarrow S_8$ biçiminde olacağı için S_8 doğrudur.

Önerme. *Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $12 \mid (n^4 - n^2)$ olur.*

İspat. Bu ispatı güçlü tümevarım yöntemiyle yapalım.

(1) Öncelikle bu önermenin ilk altı pozitif tamsayı için doğru olduğunu gösterelim:

Eğer $n = 1$ ise 12 böler $n^4 - n^2 = 1^4 - 1^2 = 0$.

Eğer $n = 2$ ise 12 böler $n^4 - n^2 = 2^4 - 2^2 = 12$.

Eğer $n = 3$ ise 12 böler $n^4 - n^2 = 3^4 - 3^2 = 72$.

Eğer $n = 4$ ise 12 böler $n^4 - n^2 = 4^4 - 4^2 = 240$.

Eğer $n = 5$ ise 12 böler $n^4 - n^2 = 5^4 - 5^2 = 600$.

Eğer $n = 6$ ise 12 böler $n^4 - n^2 = 6^4 - 6^2 = 1260$.

(2) Şimdi $k \geqslant 6$ olmak üzere $1 \leqslant m \leqslant k$ için $12 \mid (m^4 - m^2)$ olduğunu kabul edelim. (Yani $S_1, S_2, \ldots, S_k$ önermelerinin hepsi doğru olsun.) Buna göre, $12 \mid \big((k+1)^4 - (k+1)^2\big)$ olduğunu göstermeliyiz. (Yani S_{k+1} önermesinin doğru olduğunu göstermeliyiz.) S_{k-5} önermesi doğru olduğu için $12 \mid \big((k-5)^4 - (k-5)^2\big)$ yazılabilir. Eğer $\boxed{m = k-5}$ seçilirse $12 \mid (m^4 - m^2)$ olur.

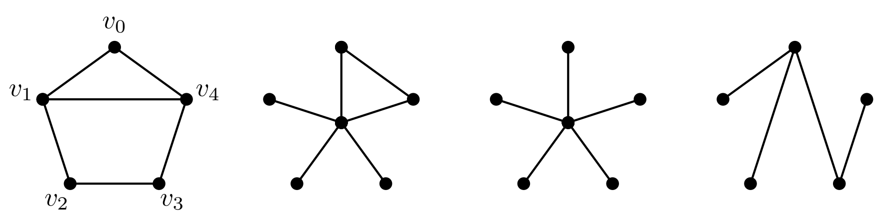
O halde, $\boxed{m^4 - m^2 = 12a}$ olacak şekilde bir a tamsayısı vardır. Buradan

$$\begin{aligned}(k+1)^4 - (k+1)^2 &= (m+6)^4 - (m+6)^2 \\ &= m^4 + 24m^3 + 216m^2 + 864m + 1296 - (m^2 + 12m + 36) \\ &= (m^4 - m^2) + 24m^3 + 216m^2 + 852m + 1260 \\ &= 12a + 24m^3 + 216m^2 + 852m + 1260 \\ &= 12(a + 2m^3 + 18m^2 + 71m + 105)\end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Buradaki $(a + 2m^3 + 18m^2 + 71m + 105)$ ifadesi bir tamsayı olduğu için $12 \mid \big((k+1)^4 - (k+1)^2\big)$ elde edilir.

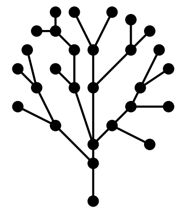
Güçlü tümevarım yöntemine göre her $n \in \mathbb{N}$ için $12 \mid (n^4 - n^2)$ olur. □

Bir sonraki örneğimiz *çizgeler* adı verilen matematiksel nesneler hakkındadır. **Köşeler** adı verilen noktalar ile bu noktaları birleştiren (**kenarlar** adı verilen) doğrulardan oluşan bir yapıya **çizge** denir. Aşağıda birkaç çizge örneği verilmiştir. Burada kullanacağımız çizgeler "tek parçalı" olacaktır. Bir başka deyişle, çizgenin herhangi bir köşesinden başka bir köşesine kenarlar üzerinden geçen bir yolu kullanarak bir yürüyüş yapılabilir.



Şekil 10.1: Çizge Örnekleri

Başladığı yerde biten ve birbirinden farklı kenarlar dizisinden oluşan bir güzergaha **döngü** denir. Örneğin Şekil 10.1'de verilen en soldaki çizgede, v_1 köşesinde başlayıp ilk önce v_2, oradan v_3 ve oradan da v_4 köşesine gidip tekrar başlangıç noktası olan v_1 köşesine dönen bir döngü vardır. Sol taraftaki iki çizgede de döngüler bulabilirsiniz ancak sağ taraftaki iki çizge döngü içermez. Döngü içermeyen çizgenin özel bir adı vardır; buna bir **ağaç** denir. Buna göre Şekil 10.1'in sağ tarafında verilen çizgelerin her ikisi de birer ağaçtır ancak sol tarafında verilen iki çizge de ağaç değildir.



Şekil 10.2: Bir ağaç

Dikkat edilirse, Şekil 10.1'deki ağaçların her ikisininin de kenar sayıları köşe sayılarıdan azdır. En sağdaki ağacın 5 tane köşesi ve 4 tane kenarı vardır. Onun yanındakinin ise 6 köşesi ve 5 kenarı vardır. Herhangi bir ağaç çizdiğinizde, bu ağacın eğer n tane köşesi var ise $n-1$ tane de kenarının var olduğunu görebilirsiniz. Şimdi bunun her zaman doğru olduğunu ispatlayalım.

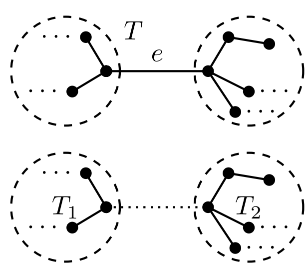
Önerme. *Eğer bir ağacın n tane köşesi var ise bu ağacın $n-1$ tane de kenarı vardır.*

İspat. Bu teorem her $n \in \mathbb{N}$ için *"S_n : n tane köşesi olan bir ağacın $n-1$ tane kenarı vardır."* önermesinin doğru olduğunu iddia etmektedir. Bunu güçlü tümevarım ile ispatlayalım.

(1) Eğer bir ağacın $n = 1$ tane köşesi varsa hiç kenarı yoktur. O halde bu ağacın $n - 1 = 0$ tane kenarı vardır. Böylece teorem $n = 1$ için doğrudur.

(2) Şimdi bir $k \geqslant 1$ tamsayısını ele alalım. Buna göre $(S_1 \wedge S_2 \wedge \cdots \wedge S_k) \Rightarrow S_{k+1}$ olduğunu göstermeliyiz. Bir başka ifadeyle, $1 \leqslant m \leqslant k$ olmak üzere m tane köşesi olan herhangi bir ağacın $m-1$ tane kenarı var ise $k+1$ tane köşesi olan her ağacın $(k+1)-1 = k$ tane kenarının olduğunu göstermeliyiz. Bunu doğrudan ispat yöntemiyle yapalım.

Kabul edelim ki $1 \leqslant m \leqslant k$ şartını sağlayan her m tamsayısı için m köşeli bir ağacın $m-1$ tane kenarı olsun. Şimdi, $k+1$ tane köşesi olan bir T ağacını göz önüne alalım. Bu ağacının bir kenarını seçelim ve aşağıda olduğu gibi bu kenarı e ile gösterelim.



Şimdi, köşeleri kalmak kaydıyla e kenarını silelim. Bu şekilde T_1 ve T_2 olarak adlandırabileceğimiz iki tane küçük ağaç elde ederiz. T_1 ağacının köşe sayısına x ve T_2 ağacının köşe sayısına da y diyelim. Küçük ağaçların köşe sayıları $k+1$'den daha az olduğu için tümevarım hipotezi, T_1 ağacının $x-1$ tane ve T_2 ağacının da $y-1$ tane kenarı olduğunu garanti eder. Şimdi T ağacını ele alalım. Bunun $x+y$ tane köşesi vardır. Bu ağaç, T_1'e ait olan $x-1$ tane kenardan, T_2'ye ait olan $y-1$ tane kenardan ve bunların hiçbirine ait olmayan e kenarından oluşur. Buna göre T ağacının toplam $(x-1)+(y-1)+1=(x+y)-1$ tane kenarı vardır. Bir başka deyişle, T ağacının kenar sayısı köşe sayısından bir azdır. O halde $(k+1)-1=k$ tane kenarı vardır.

Güçlü tümevarım yöntemine göre, n tane köşesi olan bir ağacın $n-1$ tane kenarı vardır. □

Yukarıdaki ispatta güçlü tümevarım yöntemini kullanmak kesinlikle gereklidir çünkü T_1 ve T_2 ağaçlarının köşe sayıları aynı anda k olamaz. En az birinin köşe sayısı k'dan azdır. Bu nedenle, S_{k+1} önermesini ispatlamak için sadece S_k önermesi yeterli değildir. Burada $m \leqslant k$ olduğunda S_m önermesinin doğru olduğu varsayımına ihtiyaç vardır ve güçlü tümevarım buna olanak sağlar.

10.2 En Küçük Aksine Örnekle İspat

Bu bölümde **en küçük aksine örnekle ispat** adı verilen başka bir ispat metodunu tanıtacağız. Tümevarım ve olmayana ergi yöntemlerinin bir karışımı olan bu metodun bizi doğruca çelişkiye götürmek gibi güzel bir özelliği vardır. Bundan dolayı bu metod Ünite 6'da verilen olmayana ergi yönteminden daha "otomatiktir." Bu yöntemin ana hatları şu şekildedir.

Özet: En Küçük Aksine Örnekle İspat

Önerme. $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$ *önermelerinin tamamı doğrudur.*

İspat. (En küçük aksine örnek).

(1) İlk önce S_1 önermesi doğrulanır.

(2) Olmayana ergi kullanılarak S_n önermelerinin hepsinin doğru olmadığı kabul edilir.

(3) Bu önermeler arasında **yanlış** olan en küçük indisli önerme S_k olsun ($k>1$).

(4) Bu durumda S_{k-1} doğru ve S_k yanlıştır. Bu bilgi kullanılarak bir çelişki elde edilir.

□

Bu kurgu, bizi S_{k-1} önermesinin doğru fakat S_k önermesinin yanlış olduğu bir noktaya götürür. İşte bu noktada yani doğru ile yanlışın kesiştiği yerde, bir çelişki bulunur. Şimdi bir örnek verelim.

Önerme. *Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $4 \mid (5^n - 1)$ olur.*

İspat. En küçük aksine örnekle ispat yöntemini kullanalım. (Yukarıda verilen özetle örtüşmesi açısından adımlarımızı numaralandıralım. Ancak pratikte bu genellikle yapılmaz.)

(1) Eğer $n = 1$ ise önerme $4 \mid (5^1 - 1)$ yani $4 \mid 4$ halini alır. Bu ise doğrudur.

(2) Olmayana ergi yöntemini kullanalım ve "her n için $4 \mid (5^n - 1)$ önermesi doğrudur" ifadesinin yanlış olduğunu kabul edelim.

(3) Şimdi, $4 \nmid (5^k - 1)$ şartını sağlayan en küçük tamsayı k olsun.

(4) Bu durumda $4 \mid (5^{k-1} - 1)$ olduğu için $5^{k-1} - 1 = 4a$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned}
5^{k-1} - 1 &= 4a \\
5 \cdot (5^{k-1} - 1) &= 5 \cdot 4a \\
5^k - 5 &= 20a \\
5^k - 1 &= 20a + 4 \\
5^k - 1 &= 4(5a + 1)
\end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Son satır $4 \mid (5^k - 1)$ anlamına gelir fakat bu bir çelişkidir çünkü 3. adım $4 \nmid (5^k - 1)$ olduğunu söyler. Bu nedenle, 2. adımda yapılan her n için $4 \mid (5^n - 1)$ önermesi doğru değildir varsayımı yanlıştır. Sonuç olarak, $4 \mid (5^n - 1)$ önermesi her n için doğrudur.

□

Şimdi, 1'den büyük olan her tamsayının bir tek asal ayrışımı olduğunu ifade eden **aritmetiğin temel teoremini** ispatlayalım. Örneğin, 12 tamsayısı $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ şeklinde asal çarpanlarına ayrılır ve üstelik 12'nin *her* asal ayrışımı sadece 2, 2 ve 3 sayılarını kullanır. Burada yapacağımız ispat tümevarım, durum incelemesi ve en küçük aksine örnek yöntemi ile Bölüm 7.3'ün sonunda verilen varlık ve teklik fikirlerini birleştirecektir. Bu çok temel bir sonuç olduğu için bunu bir "Teorem" olarak ifade edelim.

Teorem 10.1 (Aritmetiğin Temel Teoremi)**.** *Birden büyük her n tamsayısı sıralama önemli olmaksızın bir tek şekilde asal çarpanlarına ayrılır. Bir başka deyişle $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k$ ve $n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_l$ çarpımları bu sayının iki asal ayrışımı ise $k = l$ olur ve a_i ile p_i asalları aynıdır ancak bu asallar farklı sırada olabilir.*

İspat. Kabul edelim ki $n > 1$ olsun. İlk önce, güçlü tümevarım yöntemini kullanarak n tamsayısının bir asal ayrışımının var olduğunu gösterelim. Başlangıç adımı olarak, eğer $n = 2$ ise n bir asal sayıdır ve bu kendi başına bir asal ayrışımdır. Şimdi $n \geqslant 2$ olmak üzere 2 ile n (dahil) arasındaki her sayının bir asal ayrışımının var olduğunu kabul edelim. Buna göre $n+1$ tamsayısını ele alalım. Eğer bu sayı asal ise kendi başına bir asal ayrışımdır. Eğer asal değilse $a, b > 1$ olmak üzere $n+1 = ab$ yazılabilir. Buradaki a ve b tamsayılarının her iksi de $n+1$'den küçük olduğu için bunların $a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k$ ve $b = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_l$ biçiminde asal ayrışımları vardır. Buna göre

$$n + 1 = ab = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k)(q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_l)$$

çarpımı $n + 1$ sayısının bir asal ayrışımıdır. O halde, güçlü tümevarım yöntemine göre 1'den büyük her tamsayının bir asal ayrışımı vardır.

Şimdi en küçük aksine örnekle ispat yöntemini kullanalım ve her $n > 2$ tamsayısının asal ayrışımının bir tek olduğunu gösterelim. Eğer $n = 2$ ise n'nin asal ayrışımının tek olduğu açıktır ve bu da kendisidir. Şimdi, olmayana ergi yöntemini kullanarak, bir $n > 2$ tamsayısının $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k$ ve $n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_l$ olacak şekilde iki farklı asal ayrışımının olduğunu varsayalım. Kabul edelim ki bu şartı sağlayan en küçük tamsayı n olsun. Dikkat edilirse $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k$ ayrışımına göre $p_1 \mid n$ olduğu için $p_1 \mid a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_l$ olmalıdır. Önerme 10.1 (sayfa 190) gereğince, p_1 asalı a_i sayılarından birini böler. Fakat a_i asal olduğu için $p_1 = a_i$ olmalıdır. Buna göre $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_l$ sayısı $p_1 = a_i$ ile bölünerek

$$p_2 \cdot p_3 \cdots p_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{i-1} \cdot a_{i+1} \cdots a_l$$

elde edilir. Bu iki asal ayrışım birbirinden farklıdır çünkü n tamsayısının verilen asal ayrışımları farklıdır. (Hatırlanacağı üzere p_1 ve a_i asalları eşittir, bu nedenle çarpanlardaki farklılık yukarıdaki ayrışımlarda devam eder.) Ancak yukarıda verilen $p_2 \cdot p_3 \cdots p_k$ sayısı n'den küçüktür ve bu ise farklı asal ayrışıma sahip en küçük tamsayının n olması ile çelişir. $\square$

En küçük aksine örnekle ispat yöntemi hakkında bir uyarı yapalım. Diğer ders kitaplarındaki veya matematik makalelerindeki ispatlarda, yazar ispatın başlangıcında en küçük aksine örnekle ispat yöntemini kullanacağını genellikle söylemez. Bunun yerine, ispatı okuyarak bu yöntemin kullanıldığına dair bir çıkarım yapmanız gerekir. Aslında bu uyarı *tüm* ispat yöntemleri için geçerlidir. Eğer matematik çalışmaya devam ederseniz, deneyimlerinizle yavaş yavaş bir ispatı analiz etme yeteneği kazanacak ve açıkça belirtilmese bile hangi ispat yaklaşımının kullanıldığını anlayacaksınız. Bu yolda hayal kırıklıkları sizi bekliyor ancak bunlar gözünüzü korkutmasın. Hayal kırıklığı, yapmaya değer olan her şeyin doğal bir parçasıdır.

10.3 Fibonacci Sayıları

Leonardo Pisano, şimdiki bilinen adıyla Fibonacci, 1175 yılı civarında şu an İtalya olan yerde doğan bir matematikçidir. En önemli eseri, Ortaçağ Avrupası'nın Roma rakamlarından Hindu-Arap sayı sistemine yavaş geçiş sürecinde bir katalizör olarak kabul edilen, *Liber Abacı* adlı kitabıdır. Fakat günümüzde, kitabında tanımladığı ve kendi adını taşıyan bir sayı dizisi sayesinde daha iyi bilinmektedir. **Fibonacci dizisi**

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots$$

ile verilir. Bu dizideki sayılar **Fibonacci sayıları** olarak adlandırılır. İlk iki sayı 1 ile 1'dir. Bunlardan sonraki sayılar, kendilerinden hemen önce gelen iki sayının toplamıdır. Örneğin $3 + 5 = 8$ ve $5 + 8 = 13$ vb. olur. Bu dizinin $n-$yinci terimini F_n ile gösterelim. Buna göre $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_7 = 13$ olur ve böyle devam eder. Dikkat edilirse Fibonacci dizisininin tamamı $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ve $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ koşulları tarafından belirlenir.

Fibonacci dizisini burada kısmi olarak vermemizin sebebi, bunun herkes tarafından bilinmesi gerekmesi ve tümevarım problemleri için geniş bir kaynak yelpazesi sunmasıdır. Doğada şaşırtıcı bir sıklıkta görünen bu dizi, gizemli örüntüler ve gizli yapılarla doludur. Bu yapıların bazıları örneklerde ve alıştırmalarda açıklanacaktır.

Burada vurgulamak gerekirse $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (veya buna denk olan $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$) şartı tümevarım için harika bir kurgudur. Bu kurgu, dizinin önceki terimlerine bakarak F_n hakkında bilgi edinebileceğimizi söyler. Fibonacci dizisi hakkındaki bir şeyi tümevarım yöntemiyle ispatlarken, bir noktada $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ denkleminin kullanılması beklenmelidir.

İlk örnek olarak, her n doğal sayısı için $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$ olduğunu ispatlayalım. Örneğin, eğer $n = 5$ ise $F_6^2 - F_6F_5 - F_5^2 = 8^2 - 8 \cdot 5 - 5^2 = 64 - 40 - 25 = -1 = (-1)^n$ elde edilir.

Önerme. *Fibonacci dizisi* $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$ *kuralınına uyar.*

İspat. Bu ispatı matematiksel tümevarım yöntemiyle yapalım.

(1) Eğer $n = 1$ ise $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = F_2^2 - F_2F_1 - F_1^2 = 1^2 - 1 \cdot 1 - 1^2 = -1 = (-1)^1 = (-1)^n$ elde ederiz. O halde $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$ eşitliği $n = 1$ için doğrudur.

(2) Şimdi herhangi bir $k \geqslant 1$ tamsayısını ele alalım. Buna göre eğer $F_{k+1}^2 - F_{k+1}F_k - F_k^2 = (-1)^k$ ise $F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Bunu doğrudan ispat yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $F_{k+1}^2 - F_{k+1}F_k - F_k^2 = (-1)^k$ olsun. Dikkatli bir şekilde $F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2$ ifadesi üzerinde çalışarak, bunun gerçekten de $(-1)^{k+1}$ sayısına

eşit olduğunu gösterelim. Bu işi yaparken $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ eşitliğini kullanalım.

$$\begin{aligned}
F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2 &= (F_{k+1} + F_k)^2 - (F_{k+1} + F_k)F_{k+1} - F_{k+1}^2 \\
&= F_{k+1}^2 + 2F_{k+1}F_k + F_k^2 - F_{k+1}^2 - F_kF_{k+1} - F_{k+1}^2 \\
&= -F_{k+1}^2 + F_{k+1}F_k + F_k^2 \\
&= -(F_{k+1}^2 - F_{k+1}F_k - F_k^2) \\
&= -(-1)^k \qquad\qquad \text{(tümevarım hipotezi)} \\
&= (-1)(-1)^k \\
&= (-1)^{k+1}
\end{aligned}$$

Buna göre $F_{k+2}^2 - F_{k+2}F_{k+1} - F_{k+1}^2 = (-1)^{k+1}$ bulunur.

Tümevarım yöntemine göre her $n \in \mathbb{N}$ için $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$ elde edilir. □

Şimdi bu noktada biraz ara verelim ve ispatladığımız sonucun ne anlama geldiğini düşünelim. $F_{n+1}^2 - F_{n+1}F_n - F_n^2 = (-1)^n$ denkleminin her iki tarafı F_n^2 ile bölünerek

$$\left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)^2 - \frac{F_{n+1}}{F_n} - 1 = \frac{(-1)^n}{F_n^2}$$

bulunur. Dikkat edilirse, n tamsayısının çok büyük değerleri için bu eşitliğin sağ tarafı sıfıra çok yakındır. Eşitliğin sol tarafı ise $x^2 - x - 1 = 0$ polinomunun F_{n+1}/F_n ifadesindeki değeridir. O halde n arttıkça F_{n+1}/F_n oranı $x^2 - x - 1 = 0$ polinomunun bir köküne yaklaşır. Bu polinomun kökleri $\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$ ile verilir. $F_{n+1}/F_n > 1$ olduğu için bu oran $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *pozitif* köküne yaklaşmalıdır. Buna göre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \tag{10.1}$$

olur. Bunu hızlıca kontrol etmek için, örneğin $F_{13}/F_{12} \approx 1.618025$ ve $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618033$ olduğu görülebilir. Bunların, 12 gibi küçük bir sayı için bile ondalık kısımlarının ilk dört basamakları aynıdır.

Buradaki $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısına bazen *altın oran* denir ve bu sayının klasik sanat, mimari ve doğada ortaya çıkışına dair çok fazla spekülasyon vardır. Bir teoriye göre antik Yunan tapınağı Partenon ve Büyük Mısır Piramitleri altın oran dikkate alınarak dizayn edilmiştir.

Fakat biz burada ispatlanabilen şeylerle ilgilenmekteyiz. Bu bölümü, Fibonacci dizisinin pek çok açıdan geometrik bir diziye nasıl bezediğini gözlemleyerek kapatalım. Hatırlanacağı üzere ilk terimi a ve ortak oranı r olan **geometrik dizi**

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\ ar^5,\ ar^6,\ ar^7,\ ar^8, \ldots$$

formundadır. Bu dizinin ilkinden farklı herhangi bir terimi, kendisinden önce gelen terim r ile çarpılarak bulunur. Genel olarak bu dizinin $n-$yinci terimi $G_n = ar^n$ ile verilir ve $G_{n+1}/G_n = r$ olur. Eşitlik 10.1 bize $F_{n+1}/F_n = \Phi$ olduğunu söyler. Böylece Fibonacci dizisi, bir geometrik dizi olmasa bile, ortak oranı Φ olan bir geometrik dizi gibi davranır ve ne kadar "dışa" gidilirse benzerlik oranı da o kadar artar.

Alıştırmalar

Aşağıdaki önermeleri tümevarım, güçlü tümevarım ya da en küçük aksine örnek yöntemlerininden birini kullanarak ispatlayınız.

1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \dfrac{n^2+n}{2}$ olur.
2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ olur.
3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ olur.
4. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ olur.
5. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ olur.
6. Her n doğal sayısı için $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(8i-5) = 4n^2 - n$ olur.
7. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + \cdots + n(n+2) = \dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ olur.
8. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \cdots + \dfrac{n}{(n+1)!} = 1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$ olur.
9. Her $n \geqslant 0$ tamsayısı için $24 \mid (5^{2n} - 1)$ olur.
10. Her $n \geqslant 0$ tamsayısı için $3 \mid (5^{2n} - 1)$ olur.
11. Her $n \geqslant 0$ tamsayısı için $3 \mid (n^3 + 5n + 6)$ olur.
12. Her $n \geqslant 0$ tamsayısı için $3 \mid (4^{3n} + 8)$ olur.
13. Her $n \geqslant 0$ tamsayısı için $6 \mid (n^3 - n)$ olur.
14. Kabul edelim ki $a \in \mathbb{Z}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $5 \mid 2^n a$ ise $5 \mid a$ olduğunu ispatlayınız.
15. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ olur.

16. Her n doğal sayısı için $2^n + 1 \leqslant 3^n$ olur.

17. Kabul edelim ki $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bir U evrensel kümesinin altkümeleri ve $n \geqslant 2$ olsun. Buna göre $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$ olduğunu ispatlayınız.

18. Kabul edelim ki $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bir U evrensel kümesinin altkümeleri ve $n \geqslant 2$ olsun. Buna göre $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$ olduğunu ispatlayınız.

19. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$ olduğunu ispatlayınız.

20. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ olduğunu ispatlayınız.

21. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} + \frac{1}{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$ olur.
(Not: Bu problem, harmonik serinin ilk 2^n teriminin en az $1 + \frac{n}{2}$ olduğunu iddia eder. Bu nedenle harmonik seri ıraksaktır.)

22. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{8}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \geqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}$ olur.

23. Matematiksel tümevarım yöntemini kullanarak Binom teoremini (sayfa 98, Teorem 3.1) ispatlayınız. Bunu yaparken 96. sayfadaki Eşitlik 3.2 işinize yarayabilir.

24. Her n doğal sayısı için $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ olduğunu ispatlayınız.

25. Fibonacci dizisiyle ilgili olarak $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$ olduğunu ispatlayınız.

26. Fibonacci dizisiyle ilgili olarak $\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$ olduğunu ispatlayınız.

27. Fibonacci dizisiyle ilgili olarak $F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$ olduğunu ispatlayınız.

28. Fibonacci dizisiyle ilgili olarak $F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$ olduğunu ispatlayınız.

29. Bu problemde $n \in \mathbb{N}$ ve F_n ise $n-$yinci Fibonacci sayısı olsun. Buna göre

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \cdots + \binom{0}{n} = F_{n+1}$$

olduğunu ispatlayınız. (Örneğin $\binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} + \binom{2}{4} + \binom{1}{5} + \binom{0}{6} = 1+5+6+1+0+0+0 = 13 = F_{6+1}$ olur.)

30. Burada, $n-$yinci Fibonacci sayısı F_n olmak üzere

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

olduğunu ispatlayınız.

31. Her $n, r \in \mathbb{N}$ ve $1 \leqslant r \leqslant n$ için $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ olduğunu ispatlayınız.

32. İkili sayma sisteminde, n tane rakamlı olan ve ardışık 1 içermeyen sayıların sayısı F_{n+2} Fibonacci sayısıdır. Örneğin, $n = 2$ için bu şekilde üç tane sayı vardır $(00, 01, 10)$ ve $3 = F_{2+2} = F_4$ olur. Benzer şekilde $n = 3$ için bu şekilde beş tane sayı vardır $(000, 001, 010, 100, 101)$ ve $5 = F_{3+2} = F_5$ olur.

33. Düzlemde, herhangi ikisi paralel olmayan ve herhangi üçü aynı noktada kesişmeyen (sonsuz uzunluktaki) n tane doğru verilsin. Bu doğruların düzlemi $\frac{n^2+n+2}{2}$ parçaya ayırdığını gösteriniz.

34. Her $n \in \mathbb{N}$ için $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^n = \dfrac{3^{n+1} - 3}{2}$ olduğunu ispatlayınız.

35. Eğer n çift ve k tek doğal sayı ise $\binom{n}{k}$ sayısının çift olduğunu ispatlayınız.

36. Eğer bir $k \in \mathbb{N}$ için $n = 2^k - 1$ ise Pascal üçgeninin $n-$yinci satırındaki her terimin tek olduğunu ispatlayınız.

Geri kalan aşağıdaki tek numaralı alıştırmalar kitabın sonunda çözülmemiştir.

37. Eğer $m, n \in \mathbb{N}$ ise $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{m+k}{m} = n\binom{m+n+1}{m+1} - \binom{m+n+1}{m+2}$ olduğunu ispatlayınız.

38. Eğer n pozitif bir tamsayı ise $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ olduğunu ispatlayınız.

39. Eğer n pozitif bir tamsayı ise $\binom{n+0}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$ olduğunu ispatlayınız.

40. Pozitif m, n ve p tamsayıları için $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$ olduğunu ispatlayınız.

41. Pozitif m, n ve p tamsayıları için $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{p+k} = \binom{m+n}{m+p}$ olduğunu ispatlayınız.

Kısım IV

Bağıntı, Fonksiyon ve Kardinalite

Bölüm 11

Bağıntı

Matematikte, iki varlık arasında bir bağ kurmanın sonsuz sayıda yolu vardır. Aşağıdaki matematiksel önermeleri göz önüne alalım:

$$5 < 10 \qquad 5 \leqslant 5 \qquad 6 = \frac{30}{5} \qquad 5 \mid 80 \qquad 7 > 4 \qquad x \neq y \qquad 8 \nmid 3$$
$$a \equiv b \pmod n \qquad 6 \in \mathbb{Z} \qquad X \subseteq Y \qquad \pi \approx 3.14 \qquad 0 \geqslant -1 \qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z} \nsubseteq \mathbb{N}$$

Bunların her birinde iki tane matematiksel varlık, bir sembolün karşıt taraflarına yazılmıştır. Bu sembol, iki varlık arasındaki bağ olarak yorumlanabilir. Buna göre $<$, $\leqslant$, $=$, $|$, $\nmid$, $\in$, $\subset$ vb. sembollerine birer *bağıntı* denir çünkü bunlar varlıklar arasındaki bağları ifade eder.

Bağıntılar çok önemlidir. Aslında matematikten bütün bağıntıların çıkarılması halinde, geriye kayda değer olan çok az şeyin kalacağını kabul etmek gerekir. Bu nedenle bağıntıların çok iyi anlaşılması gerekir. Bu ünitenin amacı, buna yardımcı olmaktır.

Her bir bağıntı üzerine tek tek odaklanmak yerine (ki sonsuz sayıda farklı bağıntı olduğu için bu imkansızdır) bunların *tümünü* kapsayan genel bir teori geliştireceğiz. Bu teoriyi anlamak, bize herhangi özel bir bağıntıyı anlamak ve onun üzerinde tartışmak için gerekli altyapıyı sağlayacaktır.

Bağıntının teorik tanımını vermeden önce, bizi buna motive edecek bir örneğe bakalım. Bu örnek bizi doğal bir şekilde bağıntı tanımına yönlendirecektir.

$A = \{1,2,3,4,5\}$ kümesini ele alalım. (Bu kümeyi seçmemizin özel bir sebebi yoktur, elemanları sayılar olan herhangi bir küme bu örnek için aynı işi görür.) A kümesinin elemanları "<" sembolü kullanılarak birbirleri ile karşılaştırılabilir. Örneğin $1 < 4$, $2 < 3$, $2 < 4$ vb. olur. Bunları anlamakta sorun yaşamayız çünkü sayıları sıralama işlemi kafamıza iyi bir şekilde yerleşmiştir. Şimdi bunu, tamsayıların anlamı (veya bunların arasındaki ilişki) hakkında hiçbir fikri olmayan ancak ayrıntılar konusunda son derece takıntılı bir aptal dahiye[1] anlatmak zorunda olduğunuzu hayal edin. Öğrenciniz için aşağıdaki kümeyi yazmak yardımcı olabilir:

$$R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}.$$

[1] Matematik veya müzik gibi özel bir alanda olağanüstü yeteneğe sahip zihinsel engelli insan.

R kümesi, A kümesinin elemanları arasındaki $<$ bağıntısını faklı bir biçimde ifade eder. Burada (a,b) sıralı ikilisinin R kümesinde olması için gerek ve yeter şart $a<b$ olmasıdır. Örneğin $3<4$ ifadesinin doğru olup olmadığı sorulduğunda, öğrenciniz R kümesinin elemanlarını tarayarak $(3,4)$ sıralı ikilisini bulur ve böylece $3<4$ ifadesinin doğru olduğuna karar verir. Eğer $5<2$ olup olmadığı sorulursa $(5,2)$ sıralı ikilisinin R kümesinde *olmadığını* görür ve $5 \nless 2$ olduğuna karar verir. Böylece $A\times A$ kümesinin R altkümesi, A üzerinde tanımlı $<$ bağıntısını tamamıyla belirler.

Başlangıçta basit gelse de bağıntı tanımı için kullanacağımız ana fikir budur. Bu tanım, sadece $A=\{1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerindeki $<$ bağıntısını değil, herhangi bir küme üzerindeki herhangi bir bağıntıyı tarif edecek kadar geneldir.

Tanım 11.1. *A kümesi üzerindeki bir* ***bağıntı****, $R\subseteq A\times A$ altkümesidir. Sıklıkla $(x,y)\in R$ önermesi xRy biçiminde, $(x,y)\notin R$ önermesi ise $x\not R y$ biçiminde kısaltılır.*

Dikkat edilirse bağıntı, bir kümedir. Bu nedenle kümeler hakkındaki bilgilerimizi kullanarak bağıntıları araştırabiliriz. Ancak bağıntının teorik kısmına girmeden önce birkaç örneğe göz atalım.

Örnek 11.1. $A=\{1,2,3,4,5\}$ olmak üzere aşağıdaki kümeyi göz önüne alalım:

$$R=\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,3),(3,2),(3,1),(4,4),(4,3),(4,2),(4,1)\}\subseteq A\times A.$$

Tanım 11.1 gereğince R kümesi A üzerinde bir bağıntıdır. Burada $(1,1)\in R$ olduğu için $1R1$ yazarız. Benzer şekilde $2R1$, $2R2$ olur. Fakat (örneğin) $(3,4)\notin R$ olduğu için $3\not R 4$ olur. Dikkat edilirse R bağıntısı A kümesi üzerindeki $\geqslant$ bağıntısıdır.

Ünite 1, matematiğin tamamının kümelerle ifade edilebileceğini iddia etmişti. Bu iddianın ne kadar yerinde bir iddia olduğunu bir düşünün. Büyük-veya-eşit bağıntısı artık bir R kümesidir. (Örtülü olarak bunu $\geqslant = R$ biçiminde bile ifade edebiliriz.)

Örnek 11.2. $A=\{1,2,3,4,5\}$ olmak üzere aşağıdaki kümeyi göz önüne alalım:

$$S=\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}\subseteq A\times A.$$

Burada $1S1$, $1S3$, $4S2$ fakat $3\not S 4$, $2\not S 1$ olduğu görülebilir. S kümesi hangi anlama gelir? Bunun "*aynı paritelidir*" anlamında kullanıldığını düşünebiliriz. Böylece $1S1$ ifadesi "1 *aynı paritelidir* 1" ve $4S2$ ifadesi ise "4 *aynı paritelidir* 2" anlamına gelir.

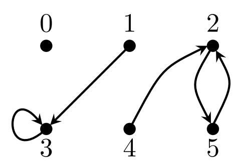
Örnek 11.3. Önceki iki örnekte verilen R ve S bağıntılarını göz önüne alalım. Görüleceği üzere $R\cap S=\{(1,1),(2,2),(3,3),(3,1),(4,4),(4,2)\}\subseteq A\times A$ kümesi A üzerinde bir bağıntıdır. Buna göre $x(R\cap S)y$ ifadesi "*$x\geqslant y$ ve x ile y aynı paritelidir*" anlamına gelir.

Örnek 11.4. $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere aşağıdaki kümeyi göz önüne alalım:

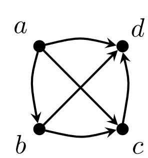
$$U = \{(1, 3), (3, 3), (5, 2), (2, 5), (4, 2)\} \subseteq B \times B.$$

$U \subseteq B \times B$ olduğu için U kümesi B üzerinde bir bağıntıdır. Bu bağıntının özel bir "anlamını" bulmak için kendinizi zorlayabilirsiniz. Fakat bir bağıntının her zaman bir anlamı olması gerekmez. $B \times B$ kümesinden rastgele seçilen herhangi bir altküme, bilinen birşeyi tanımlasın ya da tanımlamasın, her zaman bir bağıntıdır.

Bazı bağıntılar bir şekil ile temsil edilebilir. Örneğin yukarıdaki U bağıntısı göstermek için ilk önce B kümesinin elemanları ile adlandırılan noktalar çizilir. Daha sonra $(x, y) \in U$ önermesi, x elemanından y elemanına çizilen bir ok ile temsil edilir. Bu ok x ile y arasındaki *bağın* grafiksel bir semboldür. Buna göre U bağıntısı şu şekil ile temsil edilir:



Aşağıda verilen şekil, $A = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir R bağıntısını temsil eder. Buradaki xRy ifadesi, x harfinin alfabede y harfinden önce gelmesi anlamını taşır. Tanım 11.1'e göre bu bağıntı $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$ ile temsil edilir. Verilen şeklin, bağıntıyı kümeden daha iyi ifade ettiğini hissedebilirsiniz. Bunlar, aynı şeyi farklı ifade etme yollarıdır. Bazı durumlarda şekiller, bağıntıyı temsil etmek için kümelerden daha kullanışlıdır.



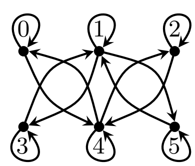
Bu tipteki diyagramlar bağıntıları temsil etmek için yardımcı olsa da bunların sınırlamaları vardır. Örneğin A ve R sonsuz olduğunda böyle bir diyagramı çizmek imkansızdır. Böyle durumlarda, R kümesini ifade etmek için ortak özellik yöntemi işe yarayabilir. Şimdi birkaç örnek verelim.

Örnek 11.5. $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x - y \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kümesini ele alalım. Bu küme, $A = \mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı $>$ bağıntısıdır. Bu bağıntı sonsuzdur çünkü $x > y$ olacak şekilde sonsuz sayıda x ve y tamsayıları vardır.

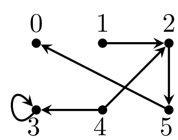
Örnek 11.6. $R = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerindeki $=$ bağıntısıdır çünkü xRy ile $x = y$ aynı anlama gelir. Buna göre R kümesi, reel sayıların eşitliğini ifade eden bağıntıdır.

Alıştırmalar

1. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun. A üzerinde $>$ bağıntısını ifade eden R kümesini yazınız. Daha sonra bunu bir diyagram ile gösteriniz.
2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olsun. A üzerinde $|$ (böler) bağıntısını ifade eden R kümesini yazınız. Daha sonra bunu bir diyagram ile gösteriniz.
3. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun. A üzerinde $\geqslant$ bağıntısını ifade eden R kümesini yazınız. Daha sonra bunu bir diyagram ile gösteriniz.
4. Aşağıda, bir A kümesi üzerinde tanımlı R bağıntısına ait diyagram verilmiştir. Buna göre A ve R kümelerini yazınız.

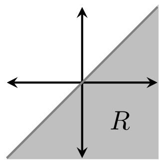


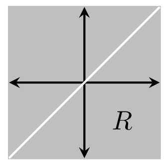
5. Aşağıda, bir A kümesi üzerinde tanımlı R bağıntısına ait diyagram verilmiştir. Buna göre A ve R kümelerini yazınız.

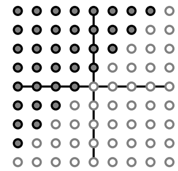


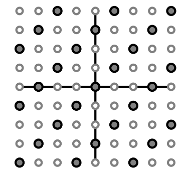
6. Tamsayılar kümesi üzerinde 5 modülüne göre denk olmak bir bağıntıdır. Bu bağıntıya göre xRy ifadesi $x \equiv y \pmod 5$ anlamına gelir. R kümesini ortak özellik yöntemi ile yazınız.
7. Tamsayılar kümesi üzerindeki $<$ bağıntısını, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kümesinin bir R altkümesi olarak yazınız. Bu küme sonsuz olduğu için ortak özellik yöntemini kullanmalısınız.
8. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olsun. Dikkat edilirse $\varnothing \subseteq A \times A$ olduğu için A üzerindeki bağıntılardan bir tanesi de $R = \varnothing$ ile verilir. Bu bağıntıya karşılık gelen diyagramı çiziniz.
9. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesi üzerinde kaç farklı bağıntı tanımlanabilir?
10. $R = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) - \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ile verilen altkümeyi göz önüne alalım. Bu küme, $\mathbb{R}$ üzerindeki hangi bağıntıdır? Açıklayınız.
11. Sonlu bir A kümesi üzerinde kaç farklı bağıntı tanımlanabilir?

Aşağıdaki alıştırmalarda, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ veya $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kümelerinin R ile verilen altkümeleri gri renkte gösterilmiştir. Bunların her birinde, R altkümesi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{Z}$ üzerindeki tanıdık bir bağıntıya karşılık gelir. Bu bağıntıları belirtiniz.

12.


13.


14.


15.


11.1 Bağıntıların Özellikleri

Bir R bağıntısı için yazılan xRy ifadesi bir *önermedir* (ya da bir *açık önermedir*) ve bundan dolayı ya doğru ya da yanlıştır. Örneğin $5 < 10$ doğru, $10 < 5$ ise yanlıştır. (Bu nedenle $+$ ve benzeri işlemler birer bağıntı değildir. Örneğin $5 + 10$ ifadesi, doğru ya da yanlış olmaktan ziyade, sayısal bir değere sahiptir.) Bağıntı ifadeleri D/Y doğruluk değerlerine sahip olukları için mantıksal operatörlerle birleştirilebilir. Örneğin $xRy \Rightarrow yRx$, doğruluğu ya da yanlışlığı x ve y elemanlarına bağlı olan bir önerme veya açık önermedir.

Bunu akılda tutarak, bazı bağıntıların diğerlerinde olmayan özelliklere sahip olduğunu bir kenara yazabiliriz. Örneğin $\mathbb{Z}$ üzerindeki $\leqslant$ bağıntısı, her $x \in \mathbb{Z}$ için $x \leqslant x$ şartını sağlar. Fakat $<$ bağıntısı bu özelliği sağlamaz çünkü $x < x$ önermesi hiçbir zaman doğru değildir. Aşağıdaki tanım, bir bağıntının sahip olabileceği üç önemli özelliği ortaya koyar.

Tanım 11.2. *Bir A kümesi üzerinde tanımlı R bağıntısı verilsin.*

(1) *Her $x \in A$ için xRx ise R bağıntısına **yansımalı** bir bağıntı denir.*
Bir başka deyişle eğer $\forall x \in A, xRx$ ise R yansıyandır.

(2) *Her $x, y \in A$ için xRy olduğunda yRx oluyorsa R bağıntısına **simetrik** bir bağıntı denir.*
Bir başka deyişle eğer $\forall x, y \in A, xRy \Rightarrow yRx$ ise R simetriktir.

(3) *Eğer xRy ve yRz olduğunda xRz oluyorsa R bağıntısına **geçişmeli** bir bağıntı denir.*
Bir başka deyişle eğer $\forall x, y, z \in A, \big((xRy) \wedge (yRz)\big) \Rightarrow xRz$ ise R geçişmelidir.

Bu özellikleri açıklamak için $A = \mathbb{Z}$ kümesini ele alalım. $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı $\leqslant$, $=$ ve $|$ bağıntıları, yansımalı bağıntı örnekleridir çünkü her $x \in \mathbb{Z}$ için $x \leqslant x$, $x = x$ ve $x \mid x$ önermelerinin hepsi doğrudur. Öbür yandan $>$, $<$, $\neq$ ve $\nmid$ bağıntılarının hiçbiri yansımalı değildir çünkü $x < x$, $x > x$, $x \neq x$ ve $x \nmid x$ önermelerinden hiçbiri doğru değildir.

Dikkat edilirse $\neq$ bağıntısı simetriktir çünkü eğer $x \neq y$ ise mutlaka $y \neq x$ olmalıdır. Benzer şekilde $x = y$ olması $y = x$ olmasını gerektirdiği için $=$ bağıntısı simetriktir.

Diğer taraftan $\leqslant$ bağıntısı simetrik değildir çünkü $x \leqslant y$ olması her zaman $y \leqslant x$ olmasını gerektirmez. Örneğin $5 \leqslant 6$ doğru fakat $6 \leqslant 5$ yanlıştır. Burada not etmek gerekirse bazı x ve y tamsayıları (örneğin $x = 2$ ve $y = 2$) için $(x \leqslant y) \Rightarrow (y \leqslant x)$ önermesi doğrudur ancak yine de $\leqslant$ simetrik değildir çünkü $(x \leqslant y) \Rightarrow (y \leqslant x)$ önermesi *bütün* x ve y tamsayıları için doğru değildir.

Yukarıdakilere ek olarak $\leqslant$ bağıntısı geçişmelidir çünkü ne zaman ki $x \leqslant y$ ve $y \leqslant z$ olsa o zaman $x \leqslant z$ olur. Benzer şekilde $<$, $\geqslant$, $>$ ve $=$ bağıntılarının hepsi geçişmelidir. Aşağıdaki tabloyu inceleyerek, neyin neden oraya yazıldığı konusunda emin olunuz.

$\mathbb{Z}$ üzerindeki bağıntılar:	$<$	$\leqslant$	$=$	$\mid$	$\nmid$	$\neq$
Yansıma	hayır	evet	evet	evet	hayır	hayır
Simetri	hayır	hayır	evet	hayır	hayır	evet
Geçişme	evet	evet	evet	evet	hayır	hayır

Örnek 11.7. $A = \{b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir R bağıntısı aşağıdaki biçimde verilsin:

$$R = \{(b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, d), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c)\}.$$

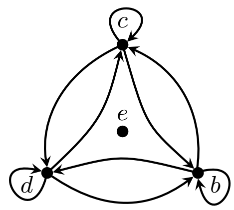
Bu bağıntı yansıyan **değildir** çünkü bRb, cRc ve dRd doğrudur fakat eRe doğru **değildir**. Bir bağıntının yansıyan olması için xRx önermesi, *her* $x \in A$ için doğru olmak zorundadır.

R bağıntısı simetriktir çünkü ne zaman ki xRy olsa o zaman yRx olur. Daha açık bir ifadeyle bRc ve cRb, bRd ve dRb, dRc ve cRd olduğu görülebilir. R kümesinden örneğin (c, b) sıralı ikilisi çıkarılırsa bu bağıntı simetri özelliğini kaybeder.

R bağıntısı geçişmelidir ancak bunu kontrol etmek biraz vakit alır. Bunun için her $x, y, z \in A$ iken $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ önermesi doğrulanmalıdır. Örneğin $x = b$, $y = c$ ve $z = d$ seçildiğinde, $(bRc \wedge cRd) \Rightarrow bRd$ önermesi $(D \wedge D) \Rightarrow D$ formunki doğru bir önerme olur. Benzer şekilde, $(bRd \wedge dRc) \Rightarrow bRc)$ önermesi de $(D \wedge D) \Rightarrow D$ formundaki doğru bir önermedir. Eğer $x = b$, $y = e$ ve $z = c$ seçilirse $(bRe \wedge eRc) \Rightarrow bRc$ önermesi $(Y \wedge Y) \Rightarrow T$ formundadır ve bu *yine* doğrudur. Çok eğlenceli olmasa da A'dan seçilen herhangi üç x, y, z elemanının bütün kombinasyonları için $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ önermesini doğrulayabilirsiniz. (En azından bunlardan bir kaçını deneyiniz.)

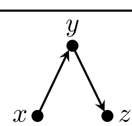
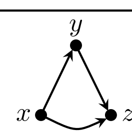
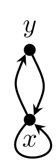
Örnek 11.7'de verilen R bağıntısına özel bir anlam yüklenebilir. Aslında xRy ifadesini, x ve y harflerinden her ikisinin de ünsüz olması anlamında düşünebiliriz. Böylelikle b ve c ünsüz olduğu için bRc ancak b ve e harflerinin her ikisi aynı anda ünsüz olmadığı için $b \not R e$ olur. Bu açıdan bakıldığında R bağıntısının geçişmeli olduğu hemen anlaşılır. Eğer x ile y iki ünsüz harf ve y ile z iki ünsüz harf ise o zaman x ile z harflerinin her ikisi de mutlaka ünsüz olmalıdır. Bu yaklaşım, bu bölümde daha sonra göreceğimiz bir noktaya işaret eder: Bir bağıntının manasını bilmek, onu anlamamıza ve onunla ilgili önermeleri ispatlamamıza yardımcı olabilir.

Aşağıda, R bağıntısına ait diyagram verilmiştir. Dikkat edilirse R bağıntısının küme tanımından çok net anlaşılır olmayan birçok özelliği, bu diyagramdan hemen görülebilir. Örneğin, e elamanı diyagramda bir düğüme sahip olmadığı için R yansımalı değildir. Böylece $e\not R e$ olur.



Şekil 11.1: Örnek 11.7'de verilen R bağıntısı

Bir bağıntının çeşitli özelliklerinin, diyagramından nasıl tespit edileceği aşağıda özetlenmiştir. Bunu Şekil 11.1 ile karşılaştırınız.

1.	Her x noktasında ...		... bir düğüm var ise ...		... bağıntı **yansımalıdır**.
2.	Bir x noktasından bir y noktasına ok olduğunda ...		... y noktasından da x noktasına bir ok var ise ...		... bağıntı **simetriktir**.
3.	Eğer x'ten y'ye ve y'den de z'ye birer ok olduğunda ...		... x'ten z'ye bir ok var ise...		... bağıntı **geçişmelidir**.
	(Geçişmeli bağıntıda $x = z$ ise yani x'ten y'ye ve y'den de x'e birer ok varsa ...		... bu, x noktasında bir düğüm vardır...		... anlamına gelir.)

Yukarıda verilen 3 nolu kutunun alt kısmındaki diyagramı göz önüne alalım. Geçişme özelliği, $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow xRx$ olmasını gerektirir. Böylece geçişmeli bir bağıntıda xRy ve yRx ise xRx olur yani x noktasında bir düğüm vardır. Bu durumda $(yRx \wedge xRy) \Rightarrow yRy$ olacağı için y noktasında da bir düğüm vardır.

Bu biçimdeki görsel araçlar aydınlatıcı olsa da bunların kullanımı sınırlıdır çünkü bağıntıların çoğu diyagramlarla düzgün bir şekilde temsil edilemeyecek kadar büyük ve karmaşıktır. Örneğin $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\equiv \pmod{n}$ bağıntısı için bir diyagram çizmek imkansızdır. Bu türdeki bir bağıntıyı teorik (ve daha az görsel) bir şekilde açıklamak en iyisidir.

Şimdi $\equiv \pmod{n}$ bağıntısının yansımalı, simetrik ve geçişmeli olduğunu ispatlayalım. Bu işi bir diyagram kullanarak yapamayacağımız bellidir. Bu nedenle ispatı, Tanım 11.4 ve $\equiv \pmod{n}$ bağıntısının özelliklerini kullanarak yapalım. Bağıntılar hakkındaki önermelerin nasıl **ispatlanacağını** gösteren bu örneğe özellikle dikkat edilmelidir.

Örnek 11.8. Aşağıdaki önermeyi ispatlayınız.

Önerme. *Bir $n \in \mathbb{N}$ verilsin. $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı $\equiv \pmod{n}$ bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişmelidir.*

Kanıt. İlk önce $\equiv \pmod{n}$ bağıntısının yansıyan olduğunu gösterelim. Herhangi bir $x \in \mathbb{Z}$ için $n \mid 0$ olduğundan $n \mid (x-x)$ yazılabilir. Böylece n modülüne göre denklik tanımından $x \equiv x \pmod{n}$ elde edilir. Bu, her $x \in \mathbb{N}$ için $x \equiv x \pmod{n}$ olduğunu gösterir. O halde $\equiv \pmod{n}$ yansımalıdır.

Şimdi $\equiv \pmod{n}$ bağıntısının simetri özelliğine sahip olduğunu gösterelim. Her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $x \equiv y \pmod{n}$ ise $y \equiv x \pmod{n}$ olduğunu göstermeliyiz. Doğrudan ispat yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki $x \equiv y \pmod{n}$ olsun. Bu durumda n modülüne göre denklik tanımından $n \mid (x-y)$ olur. Bölünebilme tanımı gereğince $x - y = na$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu eşitliğin her iki tarafını -1 ile çarparak $y - x = n(-a)$ elde eder ve buradan da $n \mid (y - x)$ buluruz. Bu, $y \equiv x \pmod{n}$ anlamına gelir. Böylece $x \equiv y \pmod{n}$ olduğunda $y \equiv x \pmod{n}$ olmalıdır. O halde $\equiv \pmod{n}$ bağıntısı simetriktir.

Son olarak $\equiv \pmod{n}$ bağıntısının geçişmeli olduğunu gösterelim. Bunun için eğer $x \equiv y \pmod{n}$ ve $y \equiv z \pmod{n}$ ise $x \equiv z \pmod{n}$ olması gerektiğini göstermeliyiz. Yine doğrudan ispat yöntemini kullanalım. Kabul edelim ki $x \equiv y \pmod{n}$ ve $y \equiv z \pmod{n}$ olsun. Bu, $n \mid (x - y)$ ve $n \mid (y - z)$ anlamına gelir. Buradan $x - y = na$ ve $y - z = nb$ olacak şekilde a ve b tamsayıları vardır. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanarak $x - z = na + nb$ elde edilir. Buradan $x - z = n(a + b)$ ve böylece $n \mid (x-z)$ elde edilir. Sonuç olarak $x \equiv z \pmod{n}$ bulunur. O halde $\equiv \pmod{n}$ bağıntısı geçişmelidir.

Yukarıdaki son üç paragraf $\equiv \pmod{n}$ bağıntısının yansıyan, simetrik ve geçişmeli olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmıştır. □

Matematik çalışmaya devam ettikçe yansıma, simetri ve geçişme özelliklerinin değişik birçok konuda özel anlam taşıdıklarını göreceksiniz. Bir sonraki bölüm, sizi buna hazırlamak için bunların ileri düzey özelliklerini inceleyecektir. Fakat bundan önce aşağıdaki alıştırmaların bazıları üzerinde çalışınız.

Alıştırmalar

1. $A = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a)\}$ bağıntısını göz önüne alalım. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bu özelliklerden biri sağlanmıyor ise nedenini açıklayınız.

2. $A = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $R = \{(a, b), (a, c), (c, c), (b, b), (c, b), (b, c)\}$ bağıntısını göz önüne alalım. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bu özelliklerden biri sağlanmıyor ise nedenini açıklayınız.

3. $A = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $R = \{(a, b), (a, c), (c, b), (b, c)\}$ bağıntısını göz önüne alalım. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bu özelliklerden biri sağlanmıyor ise nedenini açıklayınız.

4. $A = \{a, b, c, d\}$ olsun. Kabul edelim ki

$$\begin{aligned} R = \{&(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), \\ &(a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c)\} \end{aligned}$$

bir bağıntı olsun. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bu özelliklerden biri sağlanmıyor ise nedenini açıklayınız.

5. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $R = \{(0, 0), (\sqrt{2}, 0), (0, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$ bağıntısını göz önüne alalım. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bu özelliklerden biri sağlanmıyor ise nedenini açıklayınız.

6. $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı $R = \{(x, x) : x \in \mathbb{Z}\}$ bağıntısını göz önüne alalım. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bu özelliklerden biri sağlanmıyor ise nedenini söyleyiniz. Bu bağıntı, bildigimiz hangi bağıntıdır?

7. $A = \{a, b\}$ kümesi üzerinde 16 tane farklı R bağıntısı tanımlanabilir. Bunların hepsini açıklayınız. (Her biri için bir diyagram çizmek yeterlidir ancak noktaların isimlerini yazmayı unutmayınız.) Bunlardan hangileri yansımalıdır? Simetriktir? Geçişmelidir?

8. $\mathbb{Z}$ üzerindeki bir bağıntı; eğer $|x - y| < 1$ ise xRy, biçiminde tanımlansın. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bunlardan biri sağlanmıyor ise nedenini söyleyiniz. Bu bağıntı, bildigimiz hangi bağıntıdır?

9. $\mathbb{Z}$ üzerindeki bir bağıntı; xRy ancak ve ancak x ve y aynı paritelidir, biçiminde tanımlansın. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bunlardan biri sağlanmıyor ise nedenini söyleyiniz. Bu bağıntı, bildigimiz hangi bağıntıdır?

10. Kabul edelim ki $A \neq \varnothing$ olsun. Dikkat edilirse $\varnothing \subseteq A \times A$ olduğundan A üzerindeki bağıntılardan biri de $R = \varnothing$ ile verilir. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bunlardan biri sağlanmıyor ise nedenini açıklayınız.

11. Kabul edelim ki $A = \{a, b, c, d\}$ ve $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$ olsun. R yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir? Eğer bunlardan biri sağlanmıyor ise nedenini açıklayınız.

12. $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı $|$ (böler) bağıntısı yansımalı ve geçişmelidir. (Eğer nasıl yapacağınızı bilmiyorsanız Örnek 11.8 size yardımcı olabilir.)

13. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Z}\}$ bağıntısını göz önüne alalım. Bu bağıntının yansımalı, simetrik ve geçişmeli olduğunu ispatlayınız.

14. Bir A kümesi üzerinde tanımlı, simetrik ve geçişmeli bir R bağıntısı verilsin. Eğer her $x \in A$ için aRx olacak şekilde bir $a \in A$ var ise R bağıntısının yansımalı olduğunu ispatlayınız.

15. İspatlayınız ya da çürütünüz: Eğer bir bağıntı simetrik ve geçişmeli ise aynı zamanda yansımalıdır.

16. $\mathbb{Z}$ üzerinde; xRy ancak ve ancak $x^2 \equiv y^2 \pmod 4$, biçiminde bir R bağıntısı tanımlansın. R bağıntısının yansımalı, simetrik ve geçişmeli olduğunu ispatlayınız.

17. Yukarıda verilen 8. alıştırmayı biraz değiştirerek $\mathbb{Z}$ üzerinde; $x \sim y$ ancak ve ancak $|x - y| \leqslant 1$, biçiminde bir $\sim$ bağıntısı tanımlayalım. Buna göre $\sim$ bağıntısı yansımalı mıdır? Simetrik midir? Geçişmeli midir?

18. Sayfa 210'de verilen tabloya göre $\mathbb{Z}$ üzerindeki bağıntılar yansıma, simetri ve geçişme özelliklerinden üçünün çeşitli kombinasyonlarına sahip olabilir. Bu kombinasyonlardan toplamda $2^3 = 8$ tane vardır ve bunların 5 tanesi tabloda verilmiştir. (Tablo, $\leqslant$ ve $|$ bağıntıları için aynı tipte kombinasyon içermektedir.) Eksik olan üç kombinasyon için $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı bağıntı örnekleri bularak tabloyu tamamlayınız.

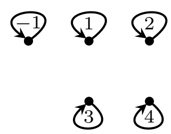
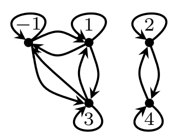
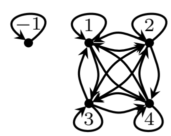
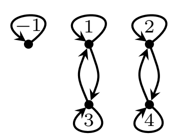
11.2 Denklik Bağıntısı

Tamsayılar (ya da herhangi bir A kümesi) üzerindeki $=$ bağıntısı yansımalı, simetrik ve geçişmelidir. Yansımalı, simetrik ve geçişmeli olan başka birçok bağıntı vardır. Matematikte, bu özelliklerin üçüne de sahip olan bağıntılara çok sık rastlanır ve bunlar çoğu zaman oldukça önemli roller oynar.

(Örneğin, = bağıntısı için bu kesinlikle doğrudur.) Bu tür bağıntıların özel bir adı vardır. Bunlara *denklik bağıntıları* denir.

Tanım 11.3. *Bir A kümesi üzerinde tanımlı; yansıyan, simetrik ve geçişmeli bir R bağıntısına* ***denklik bağıntısı*** *denir.*

Örnek olarak Şekil 11.2'de $A = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$ üzerinde tanımlı ve birbirinden farklı R_1, R_2, R_3 ve R_4 bağıntıları verilmiştir. Bunlardan her birinin, kutuların üst kısmında yazıldığı üzere, kendine özgü bir anlamı vardır. Örneğin ikinci satırdaki R_2 bağıntısı, tam olarak "*aynı paritelidir*" anlamına gelir. Buna göre $1R3$ ifadesi "1 *aynı paritelidir* 3" ya da bir başka deyişle "1 *ile* 3 *aynı paritelidir*" anlamındadır.

R bağıntısı	Diyagram	Denklik sınıfları (sonraki sayfaya bkz.)
"eşittir" (=) $R_1 = \{(-1,-1),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$		$\{-1\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$
"aynı paritelidir" $R_2 = \{(-1,-1),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),$ $(-1,1),(1,-1),(-1,3),(3,-1),$ $(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\}$		$\{-1,1,3\}$, $\{2,4\}$
"aynı işaretlidir" $R_3 = \{(-1,-1),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),$ $(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),$ $(3,4),(4,3),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2)\}$		$\{-1\}$, $\{1,2,3,4\}$
"aynı paritelidir ve aynı işaretlidir" $R_4 = \{(-1,-1),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),$ $(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\}$		$\{-1\}$, $\{1,3\}$, $\{2,4\}$

Şekil 11.2: $A = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde tanımlı bağıntı örnekleri

Yukarıdaki diyagramlardan, verilen bağıntıların yansıyan, simetrik ve geçişmeli yani birer denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla görülebilir. Örneğin R_1 simetriktir çünkü $xR_1y \Rightarrow yR_1x$ daima doğrudur:

Bu bağıntı, $x = y$ olduğunda $D \Rightarrow D$ (doğru) ve $x \neq y$ olduğunda $Y \Rightarrow Y$ (yine doğru) formundadır. Benzer şekilde R_1 geçişmelidir çünkü $(xR_1y \wedge yR_1z) \Rightarrow xR_1z$ önermesi daima doğrudur. (Bu bağıntı daima $D \Rightarrow D$, $Y \Rightarrow D$ veya $Y \Rightarrow Y$ formundadır. Bunu kontrol ediniz.)

Şekil 11.2'deki örneklerden göreceğiniz üzere bir küme üzerindeki denklik bağıntısı, o kümenin elemanları arasındaki, ister gerçek eşitlik isterse de (aynı pariteye sahip olmak gibi) daha zayıf bir ilişki olsun, bir "aynılık" ölçüsünü ifade etme eğilimindedir.

Şimdi önemli bir tanım vermenin vakti geldi. Bir A kümesi üzerinde ne zaman ki bir R denklik bağıntısı olsa bu bağıntı A kümesini *denklik sınıfları* olarak adlandırılan altkümelere ayırır. İşte tanımımız:

Tanım 11.4. *Kabul edelim ki R bir A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ve $a \in A$ olsun. A kümesinin a ile denk elemanlarından oluşan $\{x \in A : xRa\}$ altkümesine, a* ***elemanını içeren denklik sınıfı*** *denir. Bu küme $[a]$ ile gösterilir. Böylelikle a elamanını içeren denklik sınıfı, $[a] = \{x \in A : xRa\}$ kümesidir.*

Örnek 11.9. Şekil 11.2'de verilen R_1 bağıntısını ele alalım. Örneğin 2 elemanını içeren denklik sınıfı, $[2] = \{x \in A : xR_12\}$ kümesidir. Bu bağıntı, 2 ile sadece kendisini ilişkilendirdiği için $[2] = \{2\}$ olur. Bu bağıntının diğer denklik sınıfları $[-1] = \{-1\}$, $[1] = \{1\}$, $[3] = \{3\}$ ve $[4] = \{4\}$ kümeleridir. Böylece R_1 bağıntısına ait beş tane ayrık denklik sınıfı vardır.

Örnek 11.10. Şekil 11.2'de verilen R_2 bağıntısını ele alalım. Örneğin 2 elemanını içeren denklik sınıfı $[2] = \{x \in A : xR_22\}$ kümesidir. Bu bağıntı, 2 ile sadece 2 ve 4 elemanlarını ilişkilendirdiği için $[2] = \{2, 4\}$ olur. Görüleceği üzere $[4] = \{x \in A : xR_24\} = \{2, 4\}$ olur ve böylece $[2] = [4]$ elde edilir. R_2 bağıntısının başka bir denklik sınıfı da $[1] = \{x \in A : xR_21\} = \{-1, 1, 3\}$ kümesidir. Buna ek olarak $[1] = [-1] = [3] = \{-1, 1, 3\}$ olduğu görülebilir. Sonuç olarak R_2 bağıntısına ait iki tane ayrık denklik sınıfı vardır. Bu sınıflar, $\{2, 4\}$ ve $\{-1, 1, 3\}$ kümeleridir.

Örnek 11.11. Şekil 11.2'de verilen R_4 bağıntısına ait üç tane denklik sınıfı vardır. Bu denklik sınıfları, $[-1] = \{-1\}$, $[1] = [3] = \{1, 3\}$ ve $[2] = [4] = \{2, 4\}$ kümeleridir.

Şekil 11.2'nin sizi yanıltmasına izin vermeyin. Bir denklik sınıfının, her zaman noktalar ve oklardan oluşan bir diyagram ile temsil edilemeyeceğinin farkında olmak önemlidir. Örneğin en basitinden, reel sayılar kümesi üzerindeki eşitliği ifade eden $R = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ bağıntısı bile çizilemeyecek kadar büyüktür. Bu bağıntıya ait diyagram, her reel sayı için bir nokta ve her nokta için de bir düğüm gerektirir. Açıkçası bu noktalar ve düğümler çizilemeyecek kadar çoktur.

Bu bölümü sonsuz kümeler üzerinde tanımlı diğer bazı denklik bağıntıları ile kapatalım.

Örnek 11.12. Reel katsayılı bütün polinomların kümesi P olsun. P üzerindeki bir R bağıntısını şu şeklide tanımlayalım. Her $f(x), g(x) \in P$ için $f(x)Rg(x)$ ifadesi $f(x)$ ve $g(x)$ polinomlarının aynı dereceli olması anlamına gelsin. Buna göre örneğin, $(x^2+3x-4)R(3x^2-2)$ ve $(x^3+3x^2-4)\not R(3x^2-2)$ olur. R'nin bir denklik bağıntısı olduğunu görmek için hızlı bir zihinsel kontrol yeterlidir. (Bunu yapınız.) R bağıntısının denklik sınıflarını tarif etmek kolaydır. Örneğin $[3x^2+2]$ denklik sınıfı, derecesi $3x^2+2$ ile aynı olan polinomların kümesidir. Bir başka deyişle, derecesi 2 olan bütün polinomların kümesidir. Bunu, $[3x^2+2] = \{ax^2+bx+c : a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ biçiminde yazabiliriz.

Örnek 11.8, verilen bir n doğal sayısı için $\equiv \pmod n$ bağıntısının yansıyan, simetrik ve geçişmeli olduğunu ispatlamıştır. Böylece, yeni tabirimize göre, $\equiv \pmod n$ bağıntısı $\mathbb{Z}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Şimdi $n = 3$ seçelim ve $\equiv \pmod 3$ denklik bağıntısının denklik sınıflarını bulalım. Bunun için makul görünen, 0 elemanını içeren denklik sınıfıyla işe başlamaktır. Görüleceği üzere

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod 3\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid (x-0)\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid x\} = \{\ldots, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$$

olur. Buna göre $[0]$ sınıfı, 3 tamsayısının bütün katlarından oluşur. (Bir başka deyişle $[0]$ sınıfı, 3 ile bölündüğünde 0 kalanını veren bütün tamsayılardan oluşur.) Üstelik $[0] = [3] = [6] = [9]$ vb. olur. Dikkat edilirse $[0]$ kümesi, 1 tamsayısını içermez. Bu yüzden şimdi, $[1]$ denklik sınıfına bakalım:

$$[1] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1 \pmod 3\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid (x-1)\} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}.$$

Buna göre $[1]$ denklik sınıfı, 3 ile bölündüğünde 1 kalanını veren bütün tamsayılardan oluşur. Öbür yandan 2 tamsayısı, ne $[0]$ ne de $[1]$ sınıfına aittir. Bu nedenle şimdi, $[2]$ denklik sınıfını bulalım:

$$[2] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2 \pmod 3\} = \{x \in \mathbb{Z} : 3 \mid (x-2)\} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}.$$

O halde $[2]$ denklik sınıfı, 3 ile bölündüğünde 2 kalanını veren bütün tamsayılardan oluşur. Herhangi bir tamsayı $[0]$, $[1]$ veya $[2]$ denklik sınıflarından birine ait olduğu için bütün denklik sınıflarını listelemiş olduk. Böylelikle, yukarıda tarif edildiği üzere $\equiv \pmod 3$ denklik bağıntısının tamı tamına üç tane denklik sınıfı vardır.

Benzer şekilde $\equiv \pmod n$ denklik bağıntısına ait n tane $[0], [1], [2], \ldots, [n-1]$ denklik sınıfının olduğunu gösterebilirsiniz.

Alıştırmalar

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere A üzerinde tanımlı aşağıdaki denklik bağıntısını ele alalım:

$$R = (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,3), (3,2), (4,5), (5,4), (4,6), (6,4), (5,6), (6,5)$$

R bağıntısının denklik sınıflarını listeleyiniz.

2. $A = \{a, b, c, d, e\}$ üzerinde bir R denklik bağıntısı verilsin. Kabul edelim ki R bağıntısının iki tane denklik sınıfı var olsun. Eğer aRd, bRc ve eRd ise R bağıntısını bir küme olarak yazınız.

3. $A = \{a, b, c, d, e\}$ üzerinde bir R denklik bağıntısı verilsin. Kabul edelim ki R bağıntısının üç tane denklik sınıfı var olsun. Eğer aRd ve bRc ise R bağıntısını bir küme olarak yazınız.

4. $A = \{a, b, c, d, e\}$ üzerinde bir R denklik bağıntısı verilsin. Kabul edelim ki aRd, bRc, eRa ve cRe olsun. R bağıntısının kaç tane denklik sınıfı vardır?

5. $A = \{a, b\}$ kümesi üzerinde iki tane denklik bağıntısı vardır. Bunları tarif ediniz. Diyagram çizmek yeterlidir.

6. $A = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde beş tane farklı denklik bağıntısı vardır. Bunların hepsini tarif ediniz. Diyagramlar çizmek yeterlidir.

7. $\mathbb{Z}$ üzerinde; xRy ancak ve ancak $3x - 5y$ çifttir, biçiminde bir R bağıntısı tanımlayalım. R'nin bir denklik bağıntısı olduğunu ispatlayınız. Bu bağıntının denklik sınıflarını tarif ediniz.

8. $\mathbb{Z}$ üzerinde; xRy ancak ve ancak $x^2 + y^2$ çifttir, biçiminde bir R bağıntısı tanımlayalım. R'nin bir denklik bağıntısı olduğunu ispatlayınız. Bu bağıntının denklik sınıflarını tarif ediniz.

9. $\mathbb{Z}$ üzerinde; xRy ancak ve ancak $4 \mid (x + 3y)$ çifttir, biçiminde bir R bağıntısı tanımlayalım. R'nin bir denklik bağıntısı olduğunu ispatlayınız. Bu bağıntının denklik sınıflarını tarif ediniz.

10. Bir A kümesi üzerinde R ve S denklik bağıntıları verilsin. Buna göre $R \cap S$ altkümesinin de bir denklik bağıntısı olduğunu ispatlayınız. (Bunun bir örneği için Şekil 11.2'ye bakabilirsiniz. Dikkat edilirse R_2, R_3 ve R_4 denklik bağıntıları için $R_2 \cap R_3 = R_4$ olur.)

11. İspatlayınız ya da çürütünüz: Eğer R sonsuz bir A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ise R'nin sonsuz sayıda denklik sınıfı vardır.

12. İspatlayınız ya da çürütünüz: Eğer R ile S bir A kümesi üzerinde iki denklik bağıntısı ise $R \cup S$ altkümesi de A üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

13. Sonlu bir A kümesi üzerinde R denklik bağıntısı verilsin. Kabul edelim ki her bir denklik sınıfının kardinalitesi m olsun. Buna göre $|R|$ değerini m ve $|A|$ türünden ifade ediniz.

14. Sonlu bir A kümesi üzerinde, yasımalı ve simetrik bir R bağıntısı verilsin. Başka bir S bağıntısı, A üzerinde şu şekilde tanımlansın: xSy ancak ve ancak xRx_1, x_1Rx_2, x_2Rx_3, $x_3Rx_4, \ldots, x_{n-1}Rx_n$ ve x_nRy olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ ve $x_1, x_2, \ldots x_n \in A$ vardır. S'nin bir denklik bağıntısı ve $R \subseteq S$ olduğunu gösteriniz. Daha sonra A'nın denklik sınıfları arasında, R'yi kapsayan en küçük bağıntının S ve bunun tek ve sadece tek olduğunu ispatlayınız.

15. Kabul edelim ki R sonlu bir A kümesi üzerinde dört tane denklik sınıfı olan bir denklik bağıntısı olsun. Buna göre A üzerinde $R \subseteq S$ şartını sağlayan kaç farklı S denklik sınıfı vardır.

11.3 Denklik Sınıfları ve Ayrışım

Bu bölümde, denklik sınıflarına ait çeşitli özellikleri bir araya toplayacağız.

İlk olarak şu sonucu ispatlayalım: $[a] = [b]$ ancak ve ancak aRb. Bu sonuç bize $[a] = [b]$ olduğu her zaman aRb olduğunu ya da bunun tersini garanti eder. Çeşitli durumlarda, bu bilgilerin birinden diğerine geçiş yapmak faydalı olabilir. Hatta birçok durumda kendinizi bunu yaparken bulabilirsiniz. Bu sonucu ispatlarken, denklik bağıntısının (yansıma, simetri ve geçişme) özelliklerinin üçünü de kullanacağımıza dikkat etmelisiniz. Ayrıca $[a]$ ve $[b]$ kümeleriyle uğraşırken, Ünite 8'de verilen bazı metodları kullanmamız gerekecektir.

Teorem 11.1. *Bir A kümesi üzerinde R denklik bağıntısı verilsin ve $a, b \in A$ olsun. Bu durumda, $[a] = [b]$ ancak ve ancak aRb.*

İspat. Kabul edelim ki $[a] = [b]$ olsun. R bağıntısı yansıyan olduğu için aRa önermesi doğrudur. Buna göre $a \in \{x \in A : xRa\} = [a] = [b] = \{x \in A : xRb\}$ olur. Fakat a elemanının $\{x \in A : xRb\}$ kümesinde olması aRb anlamına gelir. Böylece, ancak-ve-ancaklı ispatın ilk kısmı tamamlanmış olur.

Karşıt olarak, kabul edelim ki aRb olsun. Buna göre $[a] = [b]$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bunu, $[a] \subseteq [b]$ ve $[b] \subseteq [a]$ olduğunu göstererek yapalım.

İlk önce $[a] \subseteq [b]$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $c \in [a] = \{x \in A : xRa\}$ olsun. Buna göre cRa önermesi doğrudur. R geçişmeli oluğu için cRa ve aRb önermeleri cRb olmasını gerektirir. Fakat cRb önermesi $c \in \{x \in A : xRb\} = [b]$ anlamına gelir. Böylece $c \in [a]$ ise $c \in [b]$ olduğu için $[a] \subseteq [b]$ elde edilir.

Şimdi $[b] \subseteq [a]$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $c \in [b] = \{x \in A : xRb\}$ olsun. Buna göre cRb doğrudur. Yaptığımız ilk kabul gereği aRb ve R simetrik olduğu için bRa olur. R geçişmeli olduğu için cRb ve bRa ifadeleri, cRa olmasını gerektirir. Fakat cRa olması $c \in \{x \in A : xRa = [a]\}$ anlamına gelir. Böylece $c \in [b]$ ise $c \in [a]$ olduğu için $[b] \subseteq [a]$ elde edilir.

Önceki iki paragraftan, $[a] = [b]$ elde edilir. □

Teorem 11.1'e örnek olarak, Bölüm 11.2'nin sonunda üzerinde çalıştığımız $\equiv \pmod 3$ bağıntısının denklik sınıfları ele alalım. Hatırlanacağı üzere

$$[-3] = [9] = \{\ldots, 3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$$

olduğunu görmüştük. Teorem11.1'de öngörüldüğü gibi $[-3] = [9]$ ve $-3 \equiv 9 \pmod 3$ olduğuna dikkat ediniz. Teorem, bunun herhangi bir denklik bağıntısı için doğru olduğunu garanti eder. Gelecekte, kendinizi sıklıkla Teorem 11.1'deki bu sonucu kullanırken bulabilirsiniz. Bu sonuç, zamanla daha doğal ve bilindik bir hale gelecektir. Bunun bir teorem bile olduğunu düşünmeden otomatik olarak kullanacaksınız.

Şimdi bir küme üzerinde tanımlanan denklik bağıntısının, o kümeyi çeşitli denklik sınıflarınına ayırması gerçeğine bir göz atalım. Böyle durumlarda kullanılan özel bir kelime vardır. Bu kelime ile daha sonra alacağınız matematik derslerinde karşılaşacağınız için bundan burada söz edeceğiz.

Tanım 11.5. *A kümesinin bir **ayrışımı**; A'nın boş olmayan altkümelerinin, birleşimleri A ve ikişerli kesişimleri $\varnothing$ olan bir kümesidir.*

Örnek 11.13. $A = \{a, b, c, d\}$ olsun. A kümesinin ayrışımlarından bir tanesi $\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$ ile verilir. Bu ayrışım, A kümesinin $\{a, b\}$, $\{c\}$ ve $\{d\}$ altkümelerinden oluşur. Dikkat edilirse bu üç altkümenin birleşimi A, ikişerli kesişimleri $\varnothing$'dir.

A kümesinin diğer bazı ayrışımları

$$\{\{a, b\}, \{c, d\}\}, \qquad \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}\}, \qquad \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}, \qquad \{\{a, b, c, d\}\}$$

ile verilir. Sezgisel olarak ayrışım, bir A kümesinin parçalara bölünmesidir.

Örnek 11.14. Şekil 11.2'de verilen denklik bağıntılarını göz önüne alalım. Bunların her biri $A = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$ kümesi üzerinde bir bağıntıdır. Bu bağıntıların denklik sınıfları şeklin sağ tarafında listelenmiştir. Denklik sınıflarının, her durumda, A kümesinin bir ayrışımını oluşturduğuna dikkat ediniz. Örneğin R_1 bağıntısı, A kümesinin $\{\{-1\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ ayrışımını verir. Benzer şekilde R_2 bağıntısının denklik sınıfları $\{\{-1, 1, 3\}, \{2, 4\}\}$ ayrışımını oluşturur.

Örnek 11.15. Daha önce $\mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı $\equiv \pmod 3$ denklik bağıntısının denklik sınıfları üzerinde çalıştığımızı hatırlayınız. Bu denklik sınıfları, $\mathbb{Z}$ kümesinin aşağıdaki ayrışımını verir:

$$\{\{\ \ldots, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}, \{\ldots, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}, \{\ldots, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}\}.$$

Bu ayrışımı, daha derli toplu olarak $\{[0], [1], [2]\}$ şeklinde yazabiliriz.

Örneklerimiz ve tecrübelerimiz bir denklik bağıntısına ait denklik sınıflarının, o kümenin bir ayrışımını oluşturduğu izlenimini uyandırır. Bu gerçekten de böyledir. Şimdi bunu ispatlayalım.

Teorem 11.2. *Kabul edelim ki R bir A kümesi üzerinde denklik bağıntısı olsun. Bu durumda R bağıntısının $\{[a] : a \in A\}$ ile verilen denklik sınıflarının kümesi, A kümesinin bir ayrışımıdır.*

İspat. A kümesinin bir ayrışımın $\{[a] : a \in A\}$ olduğunu göstermek için iki şeyi göstermeliyiz: Bütün $[a]$ denklik sınıflarının birleşimi A kümesidir ve $[a] \neq [b]$ ise $[a] \cap [b] = \varnothing$ olur.

Bütün $[a]$ kümelerinin birleşimi $\bigcup_{a \in A} [a]$ olur. Bu nedenle ilk önce $\bigcup_{a \in A} [a] = A$ olduğunu kanıtlamamız gerekir. Kabul edelim ki $x \in \bigcup_{a \in A} [a]$ olsun. Buna göre en az bir $a \in A$ için $x \in [a]$

olmalıdır. Fakat $[a] \subseteq A$ olduğu için $x \in A$ bulunur. Böylece $\bigcup_{a\in A}[a] \subseteq A$ elde edilir. Öbür yandan, kabul edelim ki $x \in A$ olsun. Dikkat edilirse $x \in [x]$ olduğundan bir $a \in A$ için $x \in [a]$ (daha açık bir ifadeyle $a = x$) olduğunu biliyoruz. Buradan $x \in \bigcup_{a\in A}[a]$ ve böylece $A \subseteq \bigcup_{a\in A}[a]$ bulunur. Sonuç olarak $A \subseteq \bigcup_{a\in A}[a]$ ve $\bigcup_{a\in A}[a] \subseteq A$ olduğundan $A = \bigcup_{a\in A}[a]$ elde edilir.

Şimdi $[a] \neq [b]$ ise $[a] \cap [b] = \varnothing$ olduğunu gösterelim. Bunu dolaylı ispat yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $[a] \cap [b] = \varnothing$ ifadesi doğru olmasın. Buna göre $c \in [a] \cap [b]$ olacak şekilde bir c vardır. Buradan $c \in [a]$ ve $c \in [b]$ elde edilir. R simetrik olduğu için $c \in [a]$, ifadesi ilk önce cRa ve daha sonra aRc olmasını gerektirir. Ayrıca $c \in [b]$ olması cRb anlamına gelir. R geçişmeli olduğu için aRc ve cRb önermeleri aRb olmasını gerektirir. Teorem 11.1'den dolayı aRb önermesi $[a] = [b]$ anlamına gelir. Böylelikle $[a] \neq [b]$ doğru değildir.

Yukarıda, bütün denklik sınıflarının birleşiminin A olduğunu ve iki farklı denklik sınıfının kesişiminin $\varnothing$ olduğunu gösterdik. Buna göre denklik sınıflarının kümesi A'nın bir ayrışımıdır. □

Teorem 11.2, bir A kümesi üzerindeki herhangi bir denklik bağıntısına ait denklik sınıflarının A'nın bir ayrışımını oluşturduğunu söyler. Buna karşılık A kümesinin herhangi bir ayrışımı; xRy ancak ve ancak x ile y aynı denklik sınıfındadır, biçiminde tanımlı bir denklik bağıntısı verir. (Bunun için aşağıda verilen Alıştırma 4'e bakınız.) Denklik bağıntıları ve ayrışımlar, gerçekten de aynı şeye farklı açıdan bakma yollarıdır. Gelecekteki matematiksel çalışmalarınızda, bu iki bakış açısı arasında kolayca geçiş yapabileceğinizi göreceksiniz.

Alıştırmalar

1. $A = \{a, b\}$ kümesinin bütün parçalanışlarını listeleyiniz. Cevabınızı Bölüm 11.2'deki Alıştırma 5'in cevabı ile karşılaştırınız.

2. $A = \{a, b, c\}$ kümesinin bütün parçalanışlarını listeleyiniz. Cevabınızı Bölüm 11.2'deki Alıştırma 6'nın cevabı ile karşılaştırınız.

3. $\mathbb{Z}$ kümesinin $\equiv \pmod 4$ denklik bağıntısına göre ayrışımını tarif ediniz.

4. Kabul edelim ki A kümesinin bir parçalanışı P olsun. A kümesi üzerinde bir R bağıntısını şu şekilde tanımlayalım: xRy ancak ve ancak $x, y \in X$ olacak şekilde bir $X \in P$ vardır. Buna göre R'nin A üzerinde bir denklik bağıntısı olduğunu ispatlayınız. Daha sonra R'nin denklik sınıflarının kümesinin P olduğunu gösteriniz.

5. Tam sayılar kümesinin $P = \{\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}, \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}\}$ parçalanışını ele alalım. Denklik sınıfları P'nin elemanları olan denklik bağıntısı R olsun. Buna göre R denklik bağıntısı, tanıdık olan hangi bağıntıdır?

11.4 Tamsayılarda n Modülü

Örnek 11.8'de, verilen bir $n \in \mathbb{N}$ için $\equiv \pmod{n}$ bağıntısının yansıyan, simetrik ve geçişmeli olduğunu kanıtladık. Dolayısıyla bu bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı, matematikte çok özel bir yere sahiptir. Bu bölümde bunun bazı özelliklerini ortaya çıkaracağız.

Konuyu basitleştirmek açısından n tamsayısını sabitleyelim ve $n = 5$ seçelim. İlk önce $\equiv \pmod 5$ bağıntısının denklik sınıflarına bakacak olursak bu bağıntının beş tane denklik sınıfı vardır:

$$
\begin{aligned}
[0] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod 5\} &= \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (x-0)\} &= \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}, \\
[1] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1 \pmod 5\} &= \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (x-1)\} &= \{\dots, -9, -4, 0, 6, 11, 16, \dots\}, \\
[2] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2 \pmod 5\} &= \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (x-2)\} &= \{\dots, -8, -3, 0, 7, 12, 17, \dots\}, \\
[3] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 3 \pmod 5\} &= \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (x-3)\} &= \{\dots, -7, -2, 0, 8, 13, 18, \dots\}, \\
[4] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 4 \pmod 5\} &= \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (x-4)\} &= \{\dots, -6, -1, 0, 9, 14, 19, \dots\}.
\end{aligned}
$$

Bu sınıfların, $\mathbb{Z}$ kümesini nasıl ayrıştırdığına dikkat ediniz. Denklik sınıfları $[0]$, $[1]$, $[2]$, $[3]$ ve $[4]$ olarak adlandırılmıştır ancak bildiginiz üzere bunu yapmanın farklı yolları vardır. Örneğin, $[0] = [5] = [10] = [15]$ ve $[1] = [6] = [4]$ vb. olur. Biz yine de bu beş denklik sınıfını $[0]$, $[1]$, $[2]$, $[3]$ ve $[4]$ ile belirteceğiz.

Yukarıdaki beş denklik sınıfı, $\mathbb{Z}_5$ ile göstereceğimiz bir küme oluşturur. Böylece

$$\mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$$

kümesi, beş tane kümeden oluşan bir kümedir. $\mathbb{Z}_5$ hakkında ilginç olan şey, elemanları birer küme olsa da (sayı değil), bunları toplamak ve çarpmak mümkündür. Bunun için $\mathbb{Z}_5$ üzerinde, aşağıdaki toplama ve çapma kurallarını tanımlayabiliriz:

$$
\begin{aligned}
[a] + [b] &= [a+b] \\
[a] \cdot [b] &= [a \cdot b]
\end{aligned}
$$

Örneğin, $[2] + [1] = [2+1] = [3]$ ve $[2] \cdot [2] = [2 \cdot 2] = [4]$ olur. Bu işlemleri yaparken, sayıları değil kümeleri (daha doğrusu denklik sınıflarını) topladığımızı ve çarptığımızı vurgulamak gerekir. Böylece $\mathbb{Z}_5$'in iki elemanını toplayarak (veya çarparak) yine $\mathbb{Z}_5$'in bir başka elemanını etmiş oluruz.

İşte size biraz hileli bir örnek: $[2] + [3] = [5]$ işlemi. Bu sefer $[2], [3] \in \mathbb{Z}_5$ elamanlarını toplayarak $[5] \in \mathbb{Z}_5$ elde ettik. Şüphesiz ki bu kolay bir işlem oldu ancak elde ettiğimiz $[5]$ cevabı $Z_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ kümesinde açık bir şekilde listelenmemektedir. Bu nedenle, $[5] = [0]$ olduğu için $[2] + [3] = [0]$ yazmak uygundur.

Aynı mantıkla $[6] = [1] \in \mathbb{Z}_5$ olduğu için $[2] \cdot [3] = [6]$ ifadesi $[2] \cdot [3] = [1]$ şeklinde yazılır.

Bu konudaki becerilerinizi, $\mathbb{Z}_5$ için aşağıda verilen toplam ve çarpım tablolarını doğrulayarak test ediniz.

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[4]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[4]$	$[4]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[4]$	$[1]$	$[3]$
$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[1]$	$[4]$	$[2]$
$[4]$	$[0]$	$[4]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$

$\mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ kümesini, **tamsayıların 5 modülüne göre kalan sınıflarının kümesi** olarak adlandırırız. Yukarıdaki tablolardan görüleceği üzere $\mathbb{Z}_5$ sadece bir kümeden ibaret değildir. Kendi toplama ve çarpma kuralları olan küçük bir sayı sistemidir. Bu haliyle, toplama ve çarpma ile donatılmış $\mathbb{Z}$ kümesine benzer. Elbette ki, burada seçtiğimiz 5 tamsayısının olağan dışı bir özelliği yoktur. $\mathbb{Z}_n$ kümesini, herhangi bir n doğal sayısı için aşağıdaki biçimde tanımlayabiliriz.

Tanım 11.6. *Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ doğal sayısı için $\equiv \pmod n$ bağıntısının denklik sınıfları $[0], [1], [2], \ldots, [n-1]$ kümeleridir. Bu sınıflardan oluşan $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \ldots, [n-1]\}$ kümesine **tamsayıların n modülüne göre kalan sınıflarının kümesi** denir. $\mathbb{Z}_n$ kümesinin elemanları, $[a] + [b] = [a + b]$ kuralı ile toplanır ve $[a] \cdot [b] = [ab]$ kuralı ile çarpılır.*

Herhangi verilen bir n doğal sayısı için $\mathbb{Z}_n$ kümesi, n tane elemanı olan bir sayı sistemidir. Bu sistem $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Q}$ sistemlerinde var olan cebirsel bir çok özelliğe sahiptir. Örneğin $\mathbb{Z}_n$ üzerinde, $[a] + [b] = [b] + [a]$ ve $[a] \cdot [b] = [b] \cdot [a]$ değişme özelliklerinin var olması muhtemelen sizi çok açık gelecektir. Buna ek olarak $[a] \cdot ([b] + [c]) = [a] \cdot [b] + [a] \cdot [c]$ dağılma özelliğini şu şekilde doğrulayabilirsiniz:

$$\begin{aligned}
[a] \cdot ([b] + [c]) &= [a] \cdot [b + c] \\
&= [a(b + c)] \\
&= [ab + ac] \\
&= [ab] + [ac] \\
&= [a] \cdot [b] + [a] \cdot [c]
\end{aligned}$$

Tamsayıların n modülü oldukça önemlidir çünkü bazı uygulamalar için $\mathbb{Z}$ veya $\mathbb{R}$ gibi diğer sayı sistemlerinden daha uygundur. Eğer Soyut Cebir dersi alırsanız kapsamlı bir şekilde $\mathbb{Z}_n$ ve diğer egzotik sayı sistemleriyle çalışacaksınız. (Böyle bir derste, ele aldığımız bütün ispat tekniklerinin yanı sıra denklik bağıntısı fikirlerini de kullanacaksınız.)

Bu bölümü, sizi daha önce rahatsız etmiş olabilecek bir ayrıntıyı açığa kavuşturarak kapatalım. Bu ayrıntı $[a] + [b] = [a + b]$ ve $[a] \cdot [b] = [ab]$ tanımları hakkındadır. Denklik sınıfları üzerinde tanımlanmış olan toplama ve çarpma işlemleri, bu sınıflardan seçilen a ve b temsilci elemanları kullanılarak yapılır. Ancak temsilci elemanları seçmenin bir çok farklı yolu olduğu için bu tanımlarının tutarlı olup olmadığını merak edebilirsiniz. Örneğin Alice ve Bob'un $[2]$ ve $[3]$ elemanlarını $\mathbb{Z}_5$'de çarpmak istediklerini varsayalım. Alice bu işlemi $[2] \cdot [3] = [6] = [1]$ şeklinde yaparsa cevap olarak $[1]$ bulur. Öbür yandan $[2] = [7]$ ve $[3] = [8]$ olduğu için Bob, $[2] \cdot [3]$ işlemini $[7] \cdot [8] = [56]$ şeklide yaparsa $56 \equiv 1 \pmod 5$ olduğu için o da aynı sonucu elde eder. Burada şu soru akla gelir: Verecekleri cevap her zaman aynı mıdır yoksa şans eseri mi aynı çıkmıştır?

Gerçek şu ki çarpma işlemini $\mathbb{Z}_n$ üzerinde ne şekilde yaparlarsa yapsınlar cevapları hep aynıdır. Bunun sebebini anlamak için Alice ve Bob'un $[a], [b] \in \mathbb{Z}_n$ elemanlarını çarpmak istediklerini ve $[a] = [a']$ ve $[b] = [b']$ olduğunu kabul edelim. Alice ve Bob çarpma işlemini şu şekilde yaparlar:

$$\begin{aligned} \text{Alice:} \quad & [a] \cdot [b] = [ab]\,, \\ \text{Bob:} \quad & [a'] \cdot [b'] = [a'b']\,. \end{aligned}$$

Şimdi, verdikleri cevapların aynı yani $[ab] = [a'b']$ olduğunu gösterelim. Teorem 11.1 gereğince $[a] = [a']$ iken $a = a' \pmod n$ olur. Buna göre $n \mid (a - a')$ yazabileceğimiz için $a - a' = nk$ olacak şekilde bir k tamsayısı vardır. Benzer şekilde $[b] = [b']$ olduğu için $b \equiv b' \pmod n$ ya da $n \mid (b - b')$ yazabiliriz. O halde $b - b' = nl$ olacak şekilde bir l tamsayısı vardır. Buradan $a = a' + nk$ ve $b = b' + nl$ elde ederiz. Bu nedenle:

$$\begin{aligned} ab &= (a' + nk)(b' + nl), \\ &= a'b' + a'nl + nkb' + n^2kl, \\ \text{böylece} \qquad ab - a'b' &= n(a'l + kb' + nkl). \end{aligned}$$

Son eşitlik $n \mid (ab - a'b')$ yani $ab \equiv a'b' \pmod n$ olduğunu gösterir. Buradan $[ab] = [a'b']$ sonucuna ulaşırız. Netice olarak Alice ve Bob gerçekten de hep aynı cevabı elde ederler. Böylelikle $\mathbb{Z}_n$ üzerinde tanımlanan çarpma işleminin tutarlı olduğundan emin olabiliriz.

Aşağıdaki 8. alıştıma, sizden $\mathbb{Z}_n$ üzerindeki toplama işleminin tutarlı olduğunu göstermenizi isteyecektir.

Alıştırmalar

1. $\mathbb{Z}_2$ için toplam ve çarpım tablolarını yazınız.

2. $\mathbb{Z}_3$ için toplam ve çarpım tablolarını yazınız.

3. $\mathbb{Z}_4$ için toplam ve çarpım tablolarını yazınız.

4. $\mathbb{Z}_6$ için toplam ve çarpım tablolarını yazınız.

5. Eğer $[a], [b] \in \mathbb{Z}_5$ ve $[a] \cdot [b] = 0$ ise $[a] = 0$ veya $[b] = 0$ olması gerekir mi?

6. Eğeri $[a], [b] \in \mathbb{Z}_6$ ve $[a] \cdot [b] = 0$ ise $[a] = 0$ veya $[b] = 0$ olması gerekir mi?

7. Aşağıdaki işlemleri $\mathbb{Z}_9$ üzerinde yapınız. Her durumda cevabınızı, $0 \leqslant a \leqslant 8$ olmak üzere, $[a]$ biçiminde yazınız.

   (*a*) $[8] + [8]$ (*b*) $[24] + [11]$ (*c*) $[21] \cdot [15]$ (*d*) $[8] \cdot [8]$

8. Kabul edelim ki $[a], [b] \in \mathbb{Z}_n$, $[a] = [a']$ ve $[b] = [b']$ olsun. Alice $[a]$ ile $[b]$ elemanlarını $[a] + [b] = [a + b]$ biçiminde toplasın. Bob ise bunları $[a'] + [b'] = [a' + b']$ şeklinde toplasın. Buna göre $[a + b]$ ile $[a' + b']$ ifadelerinin aynı olduğunu gösteriniz.

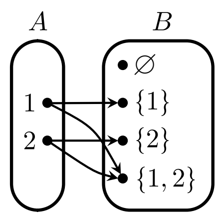
11.5 Kümeler Arasındaki Bağıntılar

Bu ünitenin başında, bir A kümesi üzerindeki bağıntıyı bir $R \subseteq A \times A$ altkümesi olarak tanımladık. Bu tanım, A kümesinin elemanlarının birbirleri ile karşılaştırabildiği her durumu modelleyebilecek bir çalışma alanı yarattı. Bu bağlamda xRy önermesi, A kümesinin x ve y elemanlarını R sembolünün karşıt taraflarında barındırır çünkü R bağıntısı A kümesinin elemanlarını karşılaştırır. Ancak bu haliyle kullanılamayacak olan başka birçok bağıntı sembolü vardır. Örneğin $\in$ sembolü için $5 \in \mathbb{Z}$ önermesi, 5 ile $\mathbb{Z}$ arasındaki bağı ifade eder. Bir başka deyişle 5 tamsayısı $\mathbb{Z}$ kümesinin bir elemanıdır. Fakat 5 ile $\mathbb{Z}$, doğal bir A kümesinin elemanları değildir. Bu zorluğun üstesinden gelebilmek için bir A kümesi üzerinde tanımlı bağıntıyı, A kümesinden B kümesine bir bağıntı şeklinde genelleyebiliriz.

Tanım 11.7. *Herhangi bir $R \subseteq A \times B$ altkümesi, A kümesinden B kümesine bir* ***bağıntıdır****. Daha önceden yapıldığı gibi $(x, y) \in R$ önermesi xRy ve $(x, y) \notin R$ ise $x \not R y$ biçiminde kısaltılabilir.*

Örnek 11.16. Kabul edelim ki $A = \{1, 2\}$ ve $B = \mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ olsun. Bu durumda $R = \{(1, \{1\}), (2, \{2\}), (1, \{1, 2\}), (2, \{1, 2\})\} \subseteq A \times B$ altkümesi A'dan B'ye bir bağıntıdır. Buna göre $1R\{1\}$, $2R\{2\}$, $1R\{1, 2\}$ ve $2R\{1, 2\}$ olduğu görülebilir. Dikkat edilirse R bağıntısı A kümesi üzerindeki, bildiğimiz $\in$ bağıntısıdır. Bir başka deyişle xRX ile $x \in X$ aynıdır.

Bir A kümesinden başka bir B kümesine tanımlı bir bağıntının diyagramı, A üzerinde tanımlı bir bağıntının diyagramından faklıdır. A'dan B'ye tanımlı bir bağıntıda iki tane küme olduğundan, bu kümeler için ayrı noktalar çizilmelidir. Bu yapıldıktan sonra, eğer xRy ise x noktasından y noktasına bir ok çizilir. Aşağıdaki şekil, Örnek 11.16 için çizilen diyagramı gösterir.



Şekil 11.3: A kümesinden B kümesine bir bağıntı

Bu ünitedeki fikirler, (ister $\geqslant$, $\leqslant$, $=$, $|$, $\in$ veya $\subseteq$ gibi bilinen isterse de daha egzotik olan) her bağıntının sadece bir küme oluğunu göstermiştir. Bu nedenle bağıntı teorisi, kümeler teorisinin bir parçasıdır. Bu fikir, bir sonraki ünitede fonksiyonlar adı verilen önemli başka bir matematiksel yapıya değinecektir. Bir fonksiyonu, bir kümeden başka bir kümeye özel bir bağıntı olarak tanımlayacak ve bu bağlamda her fonksiyonun gerçekten sadece bir küme olduğunu göreceğiz.

Bölüm 12

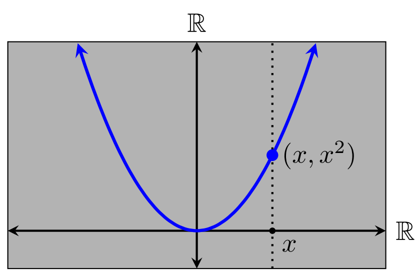
Fonksiyonlar

Analiz derslerinden bildiğiniz üzere, fonksiyonlar matematikte önemli bir rol oynar. Büyük olasılıkla bir fonksiyonu, iki (veya daha fazla) nicelik arasındaki ilişkiyi ifade eden bir formül olarak düşünmektesiniz. Takdir edersiniz ki nicelikler arasındaki ilişkiler bütün bilim dallarında çok önemlidir. Bu nedenle fonksiyonların önemli olduğuna dair kimsenin sizi ikna etmesine ihtiyaç yoktur. Buna rağmen fonksiyonların öneminin tam anlamıyla farkında olamayabilirsiniz. Fonksiyonlar, sayısal ilişikileri ifade etmekten çok daha ötedir. Genel anlamda, fonksiyonlar değişik matematiksel yapıları karşılaştırabilir ve ilişkilendirebilir. Matematik bilgi seviyeniz arttıkça bunu göreceksiniz. Bu artışa katkı sağlamak için fonksiyonları genel ve çok yönlü bir şekilde araştıracağız.

Kümeler arasındaki bağıntı kavramı (Tanım 11.7) burada önemli bir rol oynar. Bu nedenle o konuyu hızlı bir şekilde gözden geçirmek isteyebilirsiniz.

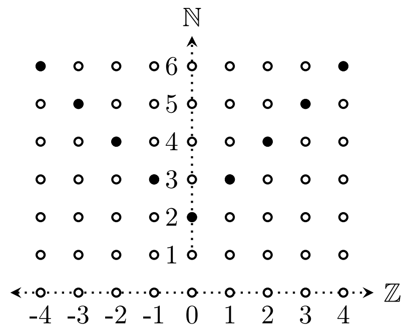
12.1 Fonksiyonlar

Tanıdık bir noktadan başlayalım. Reel sayılardan kendisine giden $f(x) = x^2$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun grafiği, $R = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ile verilen noktalar kümesidir.



Şekil 12.1: Tanıdık bir fonksiyon

Ünite 11'de verilen bilgiler doğrultusunda, f fonksiyonuna yeni bir açıdan bakabiliriz. Bu fonksiyonun grafiği olan $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi, $\mathbb{R}$ üzerinde bir bağıntıdır. Aslında, birazdan göreceğimiz üzere, fonksiyonlar özel bir bağıntı türüdür. Ancak net tanımını vermeden önce, başka bir örneğe daha bakalım. Bir n tamsayısını $|n|+2$ doğal sayısına dönüştüren $f(n)=|n|+2$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun grafiği, $R=\{(n,|n|+2): n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ kümesidir.



Şekil 12.2: $f(n)=|n|+2$ olarak tanımlı $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ fonksiyonu

Şekil 12.2, R grafiğini $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ üzerindeki koyu noktalarla göstermektedir. Bu örnekte dikkat edilecek olursa R sadece tek bir küme üzerinde bir bağıntı değildir. Girdi değerlerinin kümesi olan $\mathbb{Z}$, çıktı değerlerinin kümesi olan $\mathbb{N}$'den farklıdır. Bu nedenle, $R\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ altkümesi *$\mathbb{Z}$'den $\mathbb{N}$'ye bir bağıntıdır.*

Bu örnek üç noktaya işaret eder. Birincisi, bir fonksiyon bir A kümesinin elemanlarını başka bir B kümesinin elemanlarına gönderen bir araç olarak görülebilir. (Yukarıdaki f fonksiyonu için $A=\mathbb{Z}$ ve $B=\mathbb{N}$'dir.) İkincisi, böyle bir fonksiyona A'dan B'ye bir bağıntı gözüyle bakılabilir. Üçüncüsü, her n girdi değeri için *sadece bir tane* $f(n)$ çıktı değeri vardır. Bu durum, lisede aldığınız matematik derslerinde, *düşey doğru testi* olarak ifade edilmiştir: Her düşey doğru, bir fonksiyonun grafiği ile en fazla bir noktada kesişir. Böylece her x girdi değeri için grafik üzerinde sadece bir tane $(x,f(x))$ formunda nokta vardır. Şimdi bu kavramların hepsini kapsayan ana tanımı verelim.

Tanım 12.1. *A ve B iki küme olsun. Her $a\in A$ için (a,b) formunda sadece bir tane sıralı ikili içeren $f\subseteq A\times B$ bağıntısına A kümesinden B kümesine bir* ***fonksiyon*** *denir. (Bu fonksiyon $f:A\to B$ ile gösterilir.) Burada $(a,b)\in f$ önermesi, $f(a)=b$ şeklinde kısaltılarak yazılır.*

Örnek 12.1. Şekil 12.2'de grafiği verilen f fonksiyonunu göz önüne alalım. Tanım 12.1 uyarınca f fonksiyonunu, kendi grafiği üzerindeki noktaların kümesi yani $f=\{(n,|n|+2): n\in\mathbb{N}\}\subseteq\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ olarak düşünebiliriz. Böylece f fonksiyonu $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{N}$'ye bir bağıntıdır. Buna göre f kümesi, verilen her $a\in\mathbb{Z}$ için, ilk koordinatı a olan sadece bir tek $(a,|a|+2)$ sıralı ikilisi içerir. Burada, $(1,3)\in f$ olduğu için $f(1)=3$, $(-3,5)\in f$ olduğu için $f(-3)=5$ vb. yazarız. Genel olarak $(a,b)\in f$ ifadesi, f fonksiyonunun a girdi değerini b çıktı değerine göndermesi anlamına gelir. Bu durumu $f(a)=b$ ile gösteririz. Bu fonksiyonu bir formül ile ifade edebiliriz: Her n girdi değerine karşılık $|n|+2$ çıktı değeri elde edildiği için $f(n)=|n|+2$ yazabiliriz. Bu bilgilerin tamamı, cebir ve analiz derslerinde fonksiyonlar hakkında gördüklerimizle örtüşür; aradaki tek fark fonksiyonları aynı zamanda birer bağıntı olarak yorumlamamızdır.

Tanım 12.2. *Bir $f : A \to B$ fonksiyonu verilsin. A kümesine f fonksiyonunun* ***tanım kümesi*** *denir. (Tanım kümesi, f için olası "girdi değerleri"nin kümesi olarak düşünülebilir). B kümesine f fonksiyonunun* ***değer kümesi*** *denir. Buna ek olarak $\{f(a) : a \in A\} = \{b : (a, b) \in f\}$ kümesine f fonksiyonunun* ***görüntü kümesi*** *denir. (Görüntü kümesi, f için olası "çıktı" değerlerinin kümesi olarak düşünülebilir. Değerler kümesi ise çıktılar için bir anlamda "hedef" kümesidir).*

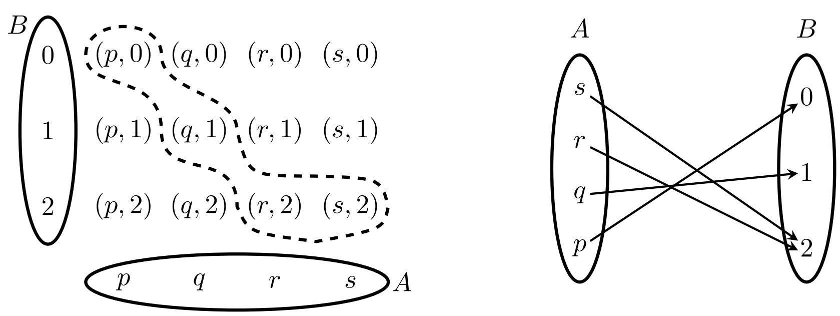
Örnek 12.1 ile devam edecek olursak f fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{Z}$, değer kümesi ise $\mathbb{N}$'dir. Görüntü kümesi, $\{f(a) : a \in \mathbb{Z}\} = \{|a|+2 : a \in \mathbb{Z}\} = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$ ile verilir. Dikkat edilirse görüntü kümesi, değer kümesinin bir altkümesidir ancak (bu durumda) değer kümesine eşit değildir.

Şu ana kadar olan örneklerimizde, tanım ve değer kümeleri sayılardan oluşmaktadır ancak bir sonraki örneğimizde görüleceği üzere bu her zaman böyle olmak zorunda değildir.

Örnek 12.2. $A = \{p, q, r, s\}$ ve $B = \{0, 1, 2\}$ olmak üzere

$$f = \{(p, 0), (q, 1), (r, 2), (s, 2)\} \subseteq A \times B$$

olsun. A kümesinin her elemanı, f kümesindeki sıralı ikililerin ilk bileşeni olacak şekilde sadece bir defa kullanıldığı için $f : A \to B$ bir fonksiyondur. Burada $f(p) = 0$, $f(q) = 1$, $f(r) = 2$ ve $f(s) = 2$ olur. Dikkat edilirse f fonksiyonunun tanım kümesi $\{p, q, r, s\}$, değer ve görüntü kümeleri ise $\{0, 1, 2\}$ ile verilir.



(a) (b)

Şekil 12.3: $f = \{(p, 0), (q, 1), (r, 2), (s, 2)\}$ fonksiyonunun iki farklı gösterimi

Eğer A ve B birer sayı kümesi değil ise $f : A \to B$ fonksiyonunun grafiğini geleneksel anlamda çizmek zordur. Şekil 12.3(a), Örnek 12.2'de verilen f fonksiyonu için bir grafik çizme teşebbüsünde bulunur. Burada A ile B kümeleri, kabaca x ile y eksenleriymiş gibi sıralanarak $A \times B$ kartezyen çarpımı uygun bir biçimde şekile yerleştirilmiştir. Daha sonra $f \subseteq A \times B$ altkümesi, kesikli çizgiler içine alınarak gösterilmiştir. Bu gösterim, f fonksiyonunun "grafiği" olarak düşünülebilir. Bu fonksiyonun daha doğal bir gösterimi 12.3(b)'de verilmiştir. Bu gösterimde, A ile B kümeleri yan yana çizilmiş ve $f(a) = b$ şartı, a noktasından b noktasına çizilen bir ok ile temsil edilmiştir.

Genel olarak, analiz veya cebirde karşılaştığınız tipteki bir $f : A \to B$ fonksiyonu için en iyi görsel açıklamayı geleneksel anlamda çizilen grafik sunar. Ancak A ve B sonlu ya da keyfi seçilen kümeler ise f fonksiyonunu oklar ile tarif etmek, onu göstermenin çoğu zaman en uygun yoludur.

Tanım 12.1 uyarınca, bir fonksiyonun gerçekten de özel bir küme olduğunu bir daha vurgulayalım. Her $f : A \to B$ fonksiyonu, $A \times B$ kartezyen çarpımının bir altkümesidir. Buna karşılık analiz ders kitabınız, bir fonksiyonu muhtemelen belirli bir tür "kural" olarak tanımlamıştır. Bu sezgisel bakış açısı, ilk birkaç dönemdeki analiz dersleri için yeterli olsa da ileri seviyede matematik çalışmak için yeterli değildir. Buradaki sorun "kural" gibi kelimelerin çok belirsiz olmasıdır. Bir fonksiyonu küme olarak tanımlamak bu belirsizliği ortadan kaldırır ve fonksiyonu somut bir matematiksel nesneye dönüştürür.

Buna rağmen pratikte fonksiyonları kurallar olarak düşünürüz. Örneğin $f(x) = |x| + 2$ formülü ile verilen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunu, $(n, |n| + 2)$ formundaki sıralı ikililerin kümesi yerine, her $x \in \mathbb{Z}$ tamsayısını $\mathbb{N}$ kümesindeki $|x| + 2$ elemanı ile eşleştiren kural olarak düşünürüz. Çünkü Tanım 12.1, (bu kitapta yaptığımız gibi) fonksiyonların doğal teorik yapısını anlamamızı veya yorumlamamızı gerektiren durumlarda kullanışlıdır. Tanım, fonksiyonları daha basit bir şekilde düşünebilmemiz için gereken temeli oluşturur.

Bir sonraki örnek, kullanılan notasyon hakkındaki bir noktaya işaret eder. Tanım kümesi bir kartezyen çarpım olan $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ gibi bir fonksiyonu ele alalım. Bu fonksiyon, bir $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ sıralı ikilisini girdi olarak kabul eder ve bunu $f((m, n)) \in \mathbb{Z}^2$ elemanına gönderir. Notasyonu basitleştirmek için, $f(x)$ yerine fx yazmaya benzese de, $f((m, n))$ yerine yaygın olarak $f(m, n)$ yazılır. Fonksiyonları göstermek için şu ana kadar f, g ve h harfleri kullanmış olmamıza rağmen, başka makul sembol de kullanılabileceğini ayrıca belirtelim. Örneğin, Yunan alfabesinin φ ve θ gibi harfleri oldukça yaygındır.

Örnek 12.3. Diyelim ki bir $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $\varphi(m, n) = 6m - 9n$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun bir küme biçimindeki gösterimi $\varphi = \big\{\big((m, n), 6m - 9n\big) : (m, n) \in \mathbb{Z}^2\big\} \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}$ ile verilir. Buna göre φ fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

Bunu cevaplamak için ilk önce herhangi bir $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ için $\varphi(m, n) = 6m - 9n = 3(2m - 3n)$ değerinin 3'ün bir katı olduğunu gözlemleyelim. Buna göre görüntü kümesindeki her sayı 3'ün bir katıdır. Böylelikle görüntü kümesi, 3 tamsayısının bütün katlarının kümesinin bir altkümesidir. Diğer taraftan eğer $b = 3k$ sayısı 3'ün bir katı ise $\varphi(-k, -k) = 6(-k) - 9(k) = 3k = b$ olur. Bu durum, 3'ün bütün katlarının φ fonksiyonunun görüntü kümesinde olduğu anlamına gelir. Bu nedenle φ fonksiyonunun görüntü kümesi $\{3k : k \in \mathbb{Z}\}$ olarak bulunur.

Bu bölümü, $f : A \to B$ ve $g : C \to D$ fonksiyonlarının eşit olmasının ne anlama geleceğini öğrenerek tamamlayalım. Tanım 12.1'e göre f ve g fonksiyonları, $f \subseteq A \times B$ ve $g \subseteq C \times D$ altkümeleridir. Eğer f ve g kümeleri eşit ise f ve g fonksiyonlarının da eşit olacağını söylemek oldukça mantıklıdır.

Böylece $f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ ve $g = \{(3, b), (2, a), (1, a)\}$ fonksiyonları eşittir çünkü f ve g kümeleri eşittir. Dikkat edilirse her iki fonksiyonun da tanım kümesi $A = \{1, 2, 3\}$ kümesidir. Bir başka deyişle A kümesi, $(x, y) \in f = g$ sıralı ikililerindeki ilk x bileşenlerinin kümesidir. Eşit fonksiyonların tanım kümeleri aynı olmak zorundadır.

Dikkat edilirse $f = g$ ifadesi, her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ olması anlamına gelir. Bu kavramları aşağıdaki tanım ile toparlayalım.

Tanım 12.3. *Herhangi iki $f : A \to B$ ve $g : A \to D$ fonksiyonu* ***eşittir*** *ancak ve ancak her $x \in A$ için $f(x) = g(x)$ olur.*

Gözlemleneceği üzere f ve g fonksiyonlarının değer kümeleri farklı olsa bile bu fonksiyonlar eşit olabilir. Örneğin $f(x) = |x| + 2$ ve $g(x) = |x| + 2$ biçiminde tanımlanan $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ ve $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu iki fonksiyonun değer kümeleri farklıdır. Ancak bu fonksiyonlar eşittir çünkü tanım kümelerindeki her x için $f(x) = g(x)$ olur.

Alıştırmalar

1. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ve $f = \{(0, 3), (1, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 2)\}$ olsun. Buna göre f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini belirterek $f(2)$ ve $f(1)$ değerlerini bulunuz.

2. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 5)\}$ olsun. Buna göre f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini belirterek $f(b)$ ve $f(d)$ değerlerini bulunuz.

3. Birbirinden farklı dört tane $f : \{a, b\} \to \{0, 1\}$ fonksiyonu vardır. Bunların hepsini listeleyiniz. Bunu, diyagramları kullanarak yapabilirsiniz.

4. Birbirinden farklı sekiz tane $f : \{a, b, c\} \to \{0, 1\}$ fonksiyonu vardır. Bunların hepsini listeleyiniz. Bunu, diyagramları kullanarak yapabilirsiniz.

5. $A = \{a, b, c, d\}$ kümesinden $B = \{d, e\}$ kümesine tanımlı, fonksiyon olmayan bir bağıntı örneği veriniz.

6. Bir $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f = \{(x, 4x + 5) : x \in \mathbb{Z}\}$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümelerini belirterek $f(10)$ değerini bulunuz.

7. Kabul edelim ki $f = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 3x + y = 4\}$ olsun. Bu küme, $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{Z}$'ye bir fonksiyon mudur? Açıklayınız.

8. Kabul edelim ki $f = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + 3y = 4\}$ olsun. Bu küme, $\mathbb{Z}$'den $\mathbb{Z}$'ye bir fonksiyon mudur? Açıklayınız.

9. Kabul edelim ki $f = \{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$ olsun. Bu küme, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye bir fonksiyon mudur? Açıklayınız.

10. Kabul edelim ki $f = \{(x^3, x) : x \in \mathbb{R}\}$ olsun. Bu küme, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye bir fonksiyon mudur? Açıklayınız.

11. Kabul edelim ki $\theta = \{(X, |X|) : X \subseteq \mathbb{Z}_5\}$ olsun. Bu küme bir fonksiyon mudur? Eğer fonksiyon ise tanım ve görüntü kümeleri nedir?

12. Kabul edelim ki $\theta = \big\{\big((x,y),(3y,2x,x+y)\big) : x,y \in \mathbb{R}\big\}$ olsun. Bu küme bir fonksiyon mudur? Eğer fonksiyon ise tanım ve görüntü kümeleri nedir?

12.2 Birebir ve Örten Fonksiyonlar

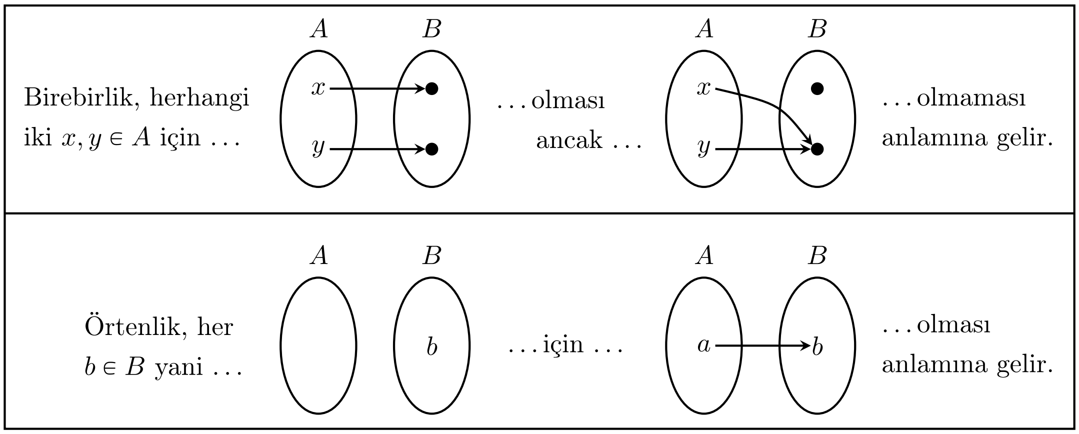
Cebir ve analizden hatırlayacağınız üzere fonksiyonlar *birebir* ve *örten* olabilir. Bu kavramlar, bir fonksiyonun tersinin olup olmadığı ile ilgilidir. Şimdi bunlara bir göz atalım. İleri matematikte, *birebir* yerine *injektif*, *örten* yerine de *surjektif* kelimeleri sıklıkla kullanılır.[1] Bunların tam tanımı şöyledir:

Tanım 12.4. *Bir $f : A \to B$ fonksiyonu verilsin.*

1. *Her $x, y \in A$ ve $x \neq y$ için $f(x) \neq f(y)$ ise f* ***birebirdir*** *(ya da injektiftir).*
2. *Her $b \in B$ için $f(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in A$ var ise f* ***örtendir*** *(ya da surjektiftir).*
3. *Eğer f birebir ve örten ise bir* ***eşlemedir*** *(ya da bijektiftir).*

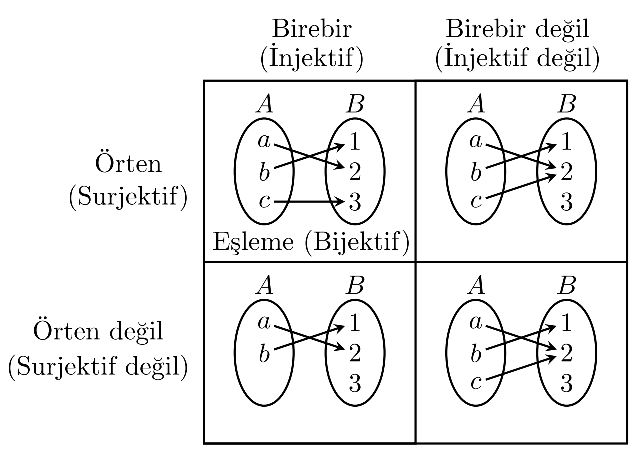
Tanım 12.4 görsel olarak aşağıda açıklanmıştır. İşin özü itibariyle birebirlik, A kümesinin eşit olmayan elemanlarının B kümesindeki eşit olmayan elemanlara gönderilmesi anlamına gelir. Örtenlik ise B kümesindeki her elemanı işaret eden bir ok olması anlamına gelir. Bir başka deyişle B kümesindeki her eleman bir $f(a)$ değerine eşittir. Burada a tanım kümesinin bir elemanıdır.

[1] *İnjektif*, *surjektif* ve *bijektif* kelimeleri İngilizcede yaygın olarak kullanılır ancak Türkçede pek tercih edilmez. Bu nedenle kitabın orjinalinde kullanılan bu kelimeler yerine, çeviride *birebir*, *örten* ve *eşleme* kelimeleri kullanılmıştır.



Biraz daha somut bir örnekler için $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye giden $f(x) = x^2$ ve $g(x) = x^3$ fonksiyonlarını ele alalım. Dikkat edilirse $-2 \neq 2$ fakat $f(-2) = f(2)$ olduğu için f birebir değildir. Benzer şekilde örten de değildir çünkü $b = -1$ (veya b herhangi bir negatif sayı) ise $f(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}$ yoktur. Öte yandan $g(x) = x^3$ fonksiyonu hem birebir hem de örtendir; bu yüzden bir eşlemedir.

Bir fonksiyonun sahip olabileceği dört tane olası birebir/örten kombinasyonu vardır. Bu kombinasyonlar, A kümesinden B kümesine giden dört fonksiyon ile aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. İlk sütundaki fonksiyonlar birebir, ikinci sütundakiler ise birebir değildir. İlk satırdaki fonksiyonlar örten, ikinci satırdakiler ise örten değildir.



Hazır buradayken belirtmek gerekirse, tanımı uyarınca, bir fonksiyonun örten olması için gerek ve yeter şart değer kümesinin görüntü kümesine eşit olmasıdır.

Genellikle belirli bir $f : A \to B$ fonksiyonunun birebir olduğununun ispatlanması gerekir. Bunun için her $x, y \in A$ için $(x \neq y) \Rightarrow \big(f(x) \neq f(y)\big)$ koşullu önermesinin doğru olduğunu göstermemiz gerekir. Bunu yapmak için iki temel yaklaşım aşağıda özetlenmiştir.

Özet: Bir $f : A \to B$ fonksiyonunun birebir olduğu nasıl gösterilir

Doğrudan Yaklaşım:
Kabul edelim ki $x, y \in A$ ve $x \neq y$ olsun.
$\vdots$
Bu nedenle $f(x) \neq f(y)$ olur.

Dolaylı Yaklaşım:
Kabul edelim ki $x, y \in A$ ve $f(x) = f(y)$ olsun.
$\vdots$
Bu nedenle $x = y$ olur.

Bu iki yaklaşım arasından, özellikle de f fonksiyonu cebirsel bir formül ile tanımlanmış ise, dolaylı yaklaşımı kullanmak daha kolaydır. Bunun sebebi, dolaylı yaklaşım $f(x) = f(y)$ *eşitliği* ile başlar ve $x = y$ *eşitliği* ile biter. Cebirde bildiğiniz üzere, eşitliklerle uğraşmak eşitsizliklerle uğraşmaktan genellikle daha kolaydır.

Bir fonksiyonunun birebir *olmadığını* kanıtlamak için $(x \neq y) \Rightarrow \big(f(x) \neq f(y)\big)$ önermesi *çürütülmelidir*. Bunun için $x \neq y$ olduğunda $f(x) = f(y)$ şartını sağlayan herhangi iki $x, y \in A$ bulmak yeterlidir.

Şimdi $f : A \to B$ fonksiyonunun *örten* olduğunu nasıl kanıtlayacağımızı inceleyelim. Tanım 12.4'e göre $\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$ önermesini ispatlamamız gerekir. Kelimelerle ifade edecek olusak her $b \in B$ için $f(a) = b$ şartını sağlayan (b elemanına bağlı olabilecek) en az bir $a \in A$ var olduğunu ispatlamamız gerekir. Bunun ana hatları şu şekildedir.

Özet: Bir $f : A \to B$ fonksiyonunun örten olduğu nasıl gösterilir

Kabul edelim ki $b \in B$ olsun.
[$f(a) = b$ olacak şekilde bir $a \in A$ var olduğunu gösteriniz.]

İkinci adımda, $f(a) = b$ koşulunu sağlayan bir a elemanının varlığını kanıtlamamız gerekir. Bunun için bu şartı sağlayan sadece bir tane a örneği bulmak yeterlidir. (Böyle bir örneğin nasıl bulunacağı f fonksiyonunun nasıl tanımlandığına bağlıdır. Eğer f bir formül olarak verilmiş ise $f(a) = b$ denklemini a için çözerek bu işi yapabiliriz. Bunu bazen de sadece düz mantık yoluyla bulabilirsiniz.) Bir fonksiyonunun örten *olmadığını* göstermek için $\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$ önermesinin değilini yani $\exists b \in B, \forall a \in a, f(a) \neq b$ önermesini ispatlamamız gerekir.

Aşağıdaki örnekler bu kavramları açıklar. (İlk örnekteki $\mathbb{R} - \{0\}$ kümesi, $\mathbb{R}$ kümesinden 0 atılarak elde edilen kümeyi temsil eder.)

Örnek 12.4. Bir $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ kuralı ile tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir olduğunu fakat örten olmadığını gösteriniz.

Bu fonksiyonun birebir olduğunu göstermek için dolaylı yaklaşımı kullanalım. Kabul edelim ki

$x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $f(x) = f(y)$ olsun. Buna göre $\frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{y} + 1$ olur. Her iki taraftan 1 çıkarılır ve elde edilen ifade ters çevrilir ise $x = y$ elde edilir. Bu nedenle f birebirdir.

Diğer taraftan f örten değildir çünkü her $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $f(x) = \frac{1}{x} + 1 \neq 1$ olacak şekilde görüntü kümesinde $b = 1 \in \mathbb{R}$ vardır.

Örnek 12.5. Bir $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fonksiyonu $g(m, n) = (m + n, m + 2n)$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir ve örten olduğunu gösteriniz.

Bu fonksiyonunun birebir olduğunu göstermek için dolaylı yaklaşımı kullanalım. Buna göre $g(m, n) = g(k, l)$ ise $(m, n) = (k, l)$ olması gerektiğini göstermemiz gerekir. Kabul edelim ki $(m, n), (k, l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ve $g(m, n) = g(k, l)$ olsun. O zaman $(m + n, m + 2n) = (k + l, k + 2l)$ olur. Buradan $m + n = k + l$ ve $m + 2n = k + 2l$ elde edilir. İkinci denklemden ilki çıkarılarak $n = l$ bulunur. Daha sonra $n = l$ denklemi $m + n = k + l$ denkleminden çıkarılarak $m = k$ elde edilir. Böylelikle $m = k$ ve $n = l$ olduğu için $(m, n) = (k, l)$ olur. Sonuç olarak g birebirdir.

Şimdi, g fonksiyonunun örten olduğunu görmek için rastgele bir $(b, c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ seçelim. Buna göre $g(x, y) = (b, c)$ olacak şekilde bir $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ var olduğunu göstermeliyiz. Dikkat edilirse $g(x, y) = (b, c)$ ifadesi $(x + y, x + 2y) = (b, c)$ anlamına gelir. Bu, aşağıdaki denklem sistemini verir:

$$\begin{aligned} x + y &= b \\ x + 2y &= c. \end{aligned}$$

Bu sistemin çözümleri $x = 2b - c$ ve $y = c - b$ ile verilir. Buradan $(x, y) = (2b - c, c - b)$ elde edilir. Böylece $g(2b - c, c - b) = (b, c)$ olduğu için g örtendir.

Örnek 12.6. Bir $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ fonksiyonu $h(m, n) = \dfrac{m}{|n| + 1}$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir ya da örten olup olmadığını belirleyiniz.

Bu fonksiyon birebir değildir çünkü $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kümesinin eşit olmayan $(1, 2)$ ve $(1, -2)$ elemanları için $h(1, 2) = h(1, -2) = \frac{1}{3}$ olur. Diğer taraftan h örtendir. Bunu görmek için herhangi bir $b \in \mathbb{Q}$ seçelim. Buna göre $b = \frac{c}{d}$ olacak şekilde $c, d \in \mathbb{Z}$ vardır. Gerekli durumlarda c tamsayısını negatif seçerek d tamsayısının pozitif olduğunu varsayabiliriz. Böylece $h(c, d - 1) = \frac{c}{|d-1|+1} = \frac{c}{d} = b$ olur.

Alıştırmalar

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olsun. Ne birebir ne de örten olan bir $f : A \to B$ fonksiyon örneği veriniz.
2. $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ doğal logaritma fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun birebir ya da örten olup olmadığına karar veriniz.
3. Kosinüs fonksiyonu $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olarak tanımlandığında birebir ya da örten olur mu? Eğer $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ olarak tanımlansaydı ne olurdu?

4. Bir $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(n) = (2n, n+3)$ ile tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir veya örten olup olmadığını kontrol ediniz.

5. Bir $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(n) = 2n + 1$ ile tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir veya örten olup olmadığını kontrol ediniz.

6. Bir $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(m, n) = 3n - 4m$ ile tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir veya örten olup olmadığını kontrol ediniz.

7. Bir $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(m, n) = 2n - 4m$ ile tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir veya örten olup olmadığını kontrol ediniz.

8. Bir $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(m, n) = (m + n, 2m + n)$ ile tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir veya örten olup olmadığını kontrol ediniz.

9. $f(x) = 5x+1$ ile tanımlı $f : \mathbb{R}-\{2\} \to \mathbb{R}-\{5\}$ fonksiyonunun bir eşleme olduğunu ispatlayınız.

10. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$ ile tanımlı $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ fonksiyonunun bir eşleme olduğunu ispatlayınız.

11. Bir $\theta : \{0, 1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $\theta(a, b) = (-1)^a b$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyon birebir midir? Örten midir? Eşleme midir? Açıklayınız.

12. Bir $\theta : \{0, 1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $\theta(a, b) = a - 2ab + b$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyon birebir midir? Örten midir? Eşleme midir? Açıklayınız.

13. Bir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonu $f(x, y) = (xy, x^3)$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyon birebir midir? Örten midir? Eşleme midir? Açıklayınız.

14. Bir $\theta : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ fonksiyonu $\theta(X) = \overline{X}$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyon birebir midir? Örten midir? Eşleme midir? Açıklayınız

15. Bu soru $f : \{A, B, C, D, E, F, G\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ fonksiyonları hakkındadır. Bu şekilde kaç tane fonksiyon vardır? Bunlardan kaç tanesi birebirdir? Kaç tanesi örtendir? Kaç tanesi eşlemedir?

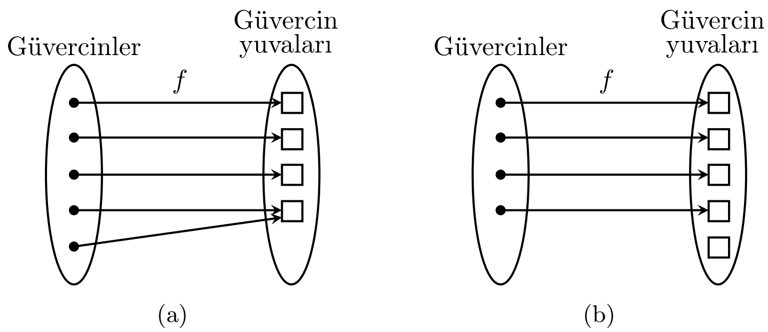
16. Bu soru $f : \{A, B, C, D, E\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ fonksiyonları hakkındadır. Bu şekilde kaç tane fonksiyon vardır? Bunlardan kaç tanesi birebirdir? Kaç tanesi örtendir? Kaç tanesi eşlemedir?

17. Bu soru $f : \{A, B, C, D, E, F, G\} \to \{1, 2\}$ fonksiyonları hakkındadır. Bu şekilde kaç tane fonksiyon vardır? Bunlardan kaç tanesi birebirdir? Kaç tanesi örtendir? Kaç tanesi eşlemedir?

18. $f(n) = \dfrac{(-1)^n(2n-1)+1}{4}$ kuralı ile tanımlı $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu gösteriniz.

12.3 Güvercin Yuvası İlkesi

İşte size basit ama faydalı bir fikir. Güvercinlerden oluşan bir A kümesi ve güvercin yuvalarından oluşan bir B kümesi var olsun. Bütün güvercinlerin uçarak yuvalarına girdiğini hayal edelim. Böylelikle X güvercininin $f(X)$ yuvasına girdiğini belirten bir $f : A \to B$ fonksiyonu tanımlayabiliriz.



Şekil 12.4: Güvercin yuvası ilkesi

Şekil 12.4(a)'daki güvercin sayısı yuva sayısından fazladır. En az iki güvercinin aynı yuvaya girmek zorunda kalacağı bu durum, f fonksiyonunun birebir olmaması anlamına gelir. Şekil 12.4(b)'deki güvercin sayısı, yuva sayısından azdır. En az bir yuvanın boş kalacağı bu durum ise f fonksiyonunun örten olmaması anlamına gelir.

Yukarıda, şekillerle ifade edilen fikrin güvercinlerle pek alakası yoktur ancak yine de güvercin yuvası ilkesi olarak adlandırılır:

Güvercin yuvası ilkesi

A ve B sonlu iki küme ve $f : A \to B$ herhangi bir fonksiyon olsun. Buna göre:

1. Eğer $|A| > |B|$ ise f birebir değildir.
2. Eğer $|A| < |B|$ ise f örten değildir.

Güvercin yuvası ilkesi oldukça basit olsa da o kadar basit olmayan bazı önermeleri ispatlamak için kullanılabilir.

Örnek 12.7. Aşağıdaki önermeyi ispatlayınız.

Önerme. *Eğer A kümesi 1 ile 100 arasındaki herhangi 10 tane tamsayının bir kümesi ise X kümesindeki elemanların toplamı Y kümesindeki elemanların toplamına eşit olacak şekilde birbirinden farklı $X \subseteq A$ ve $Y \subseteq A$ altkümeleri vardır.*

Bu önermenin ne anlama geldiğini göstermek için 1'den 100'e kadar olan tamsayılar arasından rastgele seçilmiş 10 tane sayıdan oluşan

$$A = \{5, 7, 12, 11, 17, 50, 51, 80, 90, 100\}$$

kümesini göz önüne alalım. Dikkat edilirse A kümesi, elemanları toplamı eşit olan $X = \{5, 80\}$ ve $Y = \{7, 11, 17, 50\}$ altkümelerine sahiptir. Eğer 5 yerine 6 seçerek A kümesini biraz değiştirirsek

$$A = \{6, 7, 12, 11, 17, 50, 51, 80, 90, 100\}$$

olur. Bu kümenin $X = \{7, 12, 17, 50\}$ ve $Y = \{6, 80\}$ altkümelerindeki elemanların toplamı eşittir. Önerme, A kümesi nasıl seçilirse seçilsin bunun her zaman doğru olduğunu söyler. İşte ispatı:

İspat. Kabul edelim ki $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, \ldots, 99, 100\}$ ve $|A| = 10$ olsun. Eğer $X \subseteq A$ ise X kümesinin en fazla 10 tane elemanı vardır. Buna göre X altkümesinin elemanları toplamı $100 \cdot 10 = 1000$'den küçüktür. Şimdi, X altkümesindeki elemanların toplamını $f(X)$ ile gösteren

$$f : \mathcal{P}(A) \to \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 1000\}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. (Örneğin $f(\{3, 7, 50\}) = 60$, $f(\{1, 70, 80, 95\}) = 246$.) Dikkat edilirse $|\mathcal{P}(A)| = 2^{10} = 1024 > 1001 = |\{0, 1, 2, 3, \ldots, 1000\}|$ olduğu için güvercin yuvası ilkesi gereğince f birebir değildir. Bu nedenle $f(X) = f(Y)$ olacak şekilde $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ vardır. Bir başka deyişle elemanları toplamı birbirine eşit olan $X \subseteq A$ ve $Y \subseteq A$ altkümeleri vardır.

□

Örnek 12.8. Aşağıdaki önermeyi ispatlayınız.

Önerme. *Kafalarında aynı sayıda saç teli olan en az iki Teksaslı vardır.*

İspat. Burada iki farklı bilgi kullanacağız. Birincisi, Teksas'ın nüfusu yirmi milyondan fazladır. İkincisi, her insan kafasının bir milyondan az saç teli içerdiği biyolojik bir gerçektir. Buna göre A bütün Teksaslıların kümesi ve $B = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 1000000\}$ olsun. Şimdi, x şahsının kafasındaki saç teli sayısını $f(x)$ ile gösteren $f : A \to B$ fonksiyonunu tanımlayalım. Güvercin yuvası ilkesi, $|A| > |B|$ olduğu için f fonksiyonunun birebir olmadığını söyler. Bu nedenle $f(x) = f(y)$ olacak şekilde Teksaslı x ve y şahısları vardır. Bir başka deyişle bunların kafalarında aynı sayıda saç teli vardır.

□

Güvercin yuvası ilkesini kullanan ispatlar, Bölüm 7.4'te tartışılan anlamda yapısal olmama eğilimindedir. Örneğin yukarıdaki ispat, açıkça bize kafalarında aynı miktarda saç teli olan iki Teksaslıyı vermez; sadece bu şekilde iki kişinin var olduğunu gösterir. Eğer yapısal bir ispat yapmak isteseydik, iki tane kel Teksaslı bulmak yeterli olurdu. Çünkü bunların aynı sayıda yani sıfır tane saç teli vardır.

Alıştımalar

1. Altı tane doğal sayı rastgele seçilsin. Bunlardan en az ikisinin 5 ile bölümlerinden kalan sayıların aynı olduğunu ispatlayınız.

2. Eğer a bir doğal bir sayı ise $a^k - a^l$ sayısı 10 ile tam bölünecek şekilde k ve l doğal sayıların var olduğunu ispatlayınız.

3. Altı tane doğal sayı rastgele seçilsin. Bunlardan ikisinin toplamının veya farkının 9 ile bölünebileceğini ispatlayınız.

4. Kenar uzunluğu bir birim olan bir karenin içinden rastgele beş tane nokta seçelim. Bu noktalardan en az ikisinin birbirlerine en fazla $\frac{\sqrt{2}}{2}$ birim uzaklıkta olduğunu ispatlayınız.

5. Birbirinden farklı yedi tane doğal sayı içeren her küme, toplamları ya da farkları 10 ile bölünebilen bir tamsayı çifti içerir. Bunu ispatlayınız.

6. *Büyük daire*, verilen bir S küresinin kendi merkezinden geçen düzlem ile kesişimidir. Her büyük daire S küresini iki parçaya ayırır. Bu parçalardan biriyle büyük dairenin birleşimi yarı küredir. Eğer S küresi içerisine beş tane nokta rastgele yerleştirilirse bunlardan dört tanesini içeren bir yarı kürenin var olduğunu ispatlayınız.

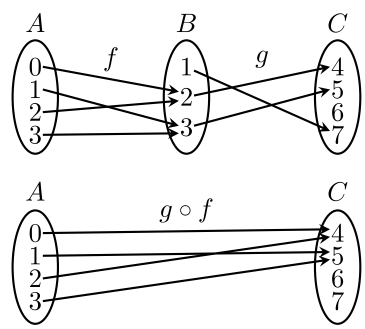
7. İspatlayınız ya da çürütünüz: $|X| > n$ şartını sağlayan her $X \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ altkümesi $a \mid b$ veya $b \mid a$ olacak şekilde birbirinden farklı a ve b elemanlarını içerir.

12.4 Bileşke

Fonksiyonlardaki bileşke kavramına cebir ve analiz derslerinden aşina olmalısınız. Yine de bu konu, daha kapsamlı bir şekilde tekrar gözden geçirilmeye değer.

Tanım 12.5. *Kabul edelim ki $f : A \to B$ ve $g : B \to C$ iki fonksiyon; f fonksiyonun değer kümesi ve g fonksiyonunun tanım kümesi eşit olsun. Buna göre f fonksiyonunun g ile* ***bileşkesi****, $g \circ f$ gösterilen başka bir fonksiyondur ve her $x \in A$ için $g \circ f(x) = g(f(x))$ kuralı ile tanımlanır. Böylece $g \circ f$ fonksiyonu, A'nın elemanlarını C'ye gönderir yani $g \circ f : A \to C$ olur.*

Aşağıdaki şekil bu tanımı açıklamaktadır. Burada $f : A \to B$, $g : B \to C$ ve $g \circ f : A \to C$ olarak verilmiştir. Örneğin, $g \circ f(0) = g(f(0)) = g(2) = 4$ olur. Sembollerin sırasına çok dikkat edilmelidir çünkü $g \circ f$ ifadesinde ilk önce g gelse de $g \circ f(x)$ bileşkesi $g(f(x))$ kuralı ile bulunur. Daha açık bir ifadeyle x değerine ilk önce f uygulanır, daha sonra $f(x)$ değerine g uygulanır.



Şekil 12.5: İki fonksiyonun bileşkesi

Dikkat edilirse f fonksiyonunun görüntü kümesi, g fonksiyonunun tanım kümesinin bir altkümesi olsa bile $g \circ f$ ifadesi anlamlıdır. Bu gözlemi aklınızda tutmalısınız. Ancak konuyu basit tutmak açısından, biz onların eşit olduğu durumlarla ilgileneceğiz.

Örnek 12.9. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$ ve $C = \{1, 2, 3\}$ kümeleri üzerinde, $f : A \to B$ fonksiyonu $f = \{(a, 0), (b, 1), (c, 0)\}$ şeklinde, $g : B \to C$ fonksiyonu ise $g = \{(0, 3), (1, 1)\}$ şeklinde tanımlansın. Buna göre $g \circ f = \{(a, 3), (b, 1), (c, 3)\}$ olur.

Örnek 12.10. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$ ve $C = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $f : A \to B$ fonksiyonu $f = \{(a, 0), (b, 1), (c, 0)\}$ biçiminde, $g : B \to C$ fonksiyonu ise $g = \{(1, 0), (2, 1), (3, 1)\}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $g \circ f$ tanımlı değildir.

Hatırlatma: $g \circ f$ ifadesinin anlamlı olabilmesi için f fonksiyonunun değer kümesi, g fonksiyonun tanım kümesine eşit (ya da en azından altkümesi) olmalıdır.

Örnek 12.11. Kabul edelim ki $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $f(x) = x^2 + x$ ve $g(x) = x + 1$ olarak tanımlasın. Buna göre $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x) = x^2 + x + 1$ formülü ile tanımlıdır.

Dikkat edilirse f ile g fonksiyonlarının tanım ve değer kümeleri eşittir. Bu nedenle fonksiyonların sırası değiştirilerek de bileşke işlemi alınabilir. Buna göre $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 + (x + 1) = x^2 + 3x + 2$ olarak tanımlıdır.

Bu örnek, $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarının her ikisi tanımlı olsa dahi bunların eşit olmak zorunda olmadığını gösterir. Bu gözlemi, *fonksiyonlardaki bileşke işlemi değişmeli değildir* diyerek ifade ederiz.

Bu bölümü, gelecekteki matematik çalışmalarınızda muhtemelen karşılaşacağınız bir kaç gözlemi ispatlayarak bitirelim. Bunlardan ilki, değişmeli olmasa da, fonksiyon bileşkesinin birleşme özelliğine *sahip* olmasıdır.

Teorem 12.1. *Fonksiyonlardaki bileşke işlemi birleşme özelliğine sahiptir. Bir başka deyişle eğer* $f : A \to B$, $g : B \to C$ *ve* $h : C \to D$ *ise* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ *olur.*

İspat. Kabul edelim ki f, g ve h belirtildiği gibi olsun. Tanım 12.5 gereğince $(h \circ g) \circ f$ ve $h \circ (g \circ f)$ ifadeleri, A kümesinden D kümesine birer fonksiyondur. Bunların eşit olduğunu göstermek için

$$(h \circ g) \circ f(x) = h \circ (g \circ f)(x)$$

denklemini her $x \in A$ için doğrulamalıyız. Tanım 12.5'e göre

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))$$

ve

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x)))$$

olur. Her iki denklemin sağ tarafı $h(g(f(x)))$ ifadesine eşittir. Böylece

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x)$$

elde ederiz. □

Teorem 12.2. *Kabul edelim ki* $f : A \to B$ *ve* $g : B \to C$ *olsun. Eğer hem* f *hem de* g *birebir ise* $g \circ f$ *birebirdir. Eğer hem* f *hem de* g *örten ise* $g \circ f$ *örtendir.*

İspat. İlk önce f ve g birebir olsun. Buna göre $g \circ f$ fonksiyonunun birebir olduğunu görmek için $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ iken $x = y$ olmasını gerektiğini göstermeliyiz. Kabul edelim ki $g \circ f(x) = g \circ f(y)$

olsun. Bu, $g(f(x)) = g(f(y))$ anlamına gelir. Buradan $f(x) = f(y)$ bulunur. (Aksi halde g birebir olamaz.) Üstelik, f birebir ve $f(x) = f(y)$ olduğu için $x = y$ olmalıdır. Böylelikle $g \circ f$ birebirdir.

Şimdi, f ve g örten olsun. Buna göre $g \circ f$ fonksiyonunun örten olduğunu görmek için C kümesindeki her c elemanı için $gof(a) = c$ olacak şekilde bir $a \in A$ var olduğunu göstermeliyiz. Bunun için C kümesinden rastgele bir c elemanı seçelim. Dikkat edilirse g örten olduğu için $g(b) = c$ olacak şekilde B kümesinin bir b elemanı vardır. Aynı zamanda, f örten olduğu için $f(a) = b$ olacak şekilde A kümesinde bir a elemanı vardır. Dolayısıyla $g(f(a)) = g(b) = c$ olur ki bu $g \circ f(a) = c$ anlamına gelir. Böylece $g \circ f$ örtendir. □

Alıştırmalar

1. $A = \{5, 6, 8\}$, $B = \{0, 1\}$ ve $C = \{1, 2, 3\}$ kümeleri verilsin. Kabul edelim ki $f : A \to B$ fonksiyonu $f = \{(5, 1), (6, 0), (8, 1)\}$ olarak, $g : B \to C$ fonksiyonu ise $g = \{(0, 1), (1, 1)\}$ olarak verilsin. Buna göre $g \circ f$ fonksiyonunu bulunuz.

2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ ve $C = \{1, 2, 3\}$ kümeleri verilsin. Kabul edelim ki

$$f = \{(1, 0), (2, 1), (3, 2), (4, 0)\}$$

kümesi $f : A \to B$ fonksiyonunu, $g = \{(0, 1), (1, 1), (2, 3)\}$ kümesi ise $g : B \to C$ fonksiyonunu tanımlansın. Buna göre $g \circ f$ fonksiyonunu bulunuz.

3. $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde verilen $f, g : A \to A$ fonksiyonları $f = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1)\}$ ve $g = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$ olarak tanımlansın. Buna göre $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını bulunuz.

4. $A = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde verilen $f, g : A \to A$ fonksiyonları $f = \{(a, c), (b, c), (c, c)\}$ ve $g = \{(a, a), (b, b), (c, a)\}$ olarak tanımlansın. Buna göre $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını bulunuz.

5. Kabul edelim ki $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$ ve $g(x) = x^3$ olarak tanımlansın. Buna göre $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını formüle ediniz.

6. Kabul edelim ki $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ve $g(x) = 3x + 2$ olarak tanımlansın. Buna göre $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını formüle ediniz.

7. Kabul edelim ki $f(m, n) = (mn, m^2)$ ve $g(m, n) = (m+1, m+n)$ ile tanımlı $f, g : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ fonksiyonları verilsin. Buna göre $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını formüle ediniz.

8. Kabul edelim ki $f(m, n) = (3m - 4n, 2m + n)$ ve $g(m, n) = (5m + n, m)$ olarak tanımlanmış $f, g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fonksiyonları verilsin. Buna göre $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını formüle ediniz.

9. Kabul edelim ki $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(m,n) = m+n$ olarak, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fonksiyonu ise $g(m) = (m,m)$ olarak tanımlansın. Buna göre $g \circ f$ ve $f \circ g$ fonksiyonlarını formüle ediniz.

10. Kabul edelim ki $f : \mathbb{R}^2 \to R^2$ fonksiyonu $f(x,y) = (xy, x^3)$ olarak tanımlansın. Buna göre $f \circ f$ fonksiyonunu formüle ediniz.

12.5 Ters Fonksiyonlar

Analizden hatırlayacağınız üzere, bir f fonksiyonu birebir ve örten ise tanım kümesindeki her x için $f^{-1}(f(x)) = x$ olacak şekilde, f fonksiyonunun yaptığını "eski haline döndüren" bir f^{-1} ters fonksiyonu vardır. (Örneğin, $f(x) = x^3$ ise $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ olur.) Şimdi bu kavramı bir gözden geçirelim. Bunun için aşağıdaki tanımlarda özetlenen iki içeriği kullanacağız.

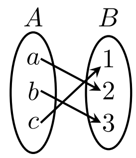
Tanım 12.6. *Bir A kümesi verilsin. Her $x \in A$ için $i_A(x) = x$ kuralı ile tanımlı $i_A : A \to A$ fonksiyonuna A üzerinde* ***özdeşlik fonksiyonu*** *denir.*

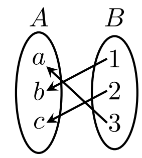
Örnek 12.12. Eğer $A = \{1,2,3\}$ ise $i_A = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ olur. Ayrıca $i_{\mathbb{Z}} = \{(n,n) : n \in \mathbb{Z}\}$ ile verilir. Bir küme üzerinde tanımlı özdeşlik fonksiyonu, o kümenin her elemanını kendisine gönderen fonksiyondur.

Herhangi bir A kümesi üzerinde tanımlı i_A özdeşlik fonksiyonunun bir eşleme olduğuna dikkat edilmelidir. Bu fonksiyon birebirdir çünkü $i_A(x) = i_A(y)$ ifadesi, anında $x = y$ ifadesine indirgenir. Bu fonksiyon örtendir çünkü A değer kümesinden herhangi bir b elemanı aldığımızda, b aynı zamanda tanım kümesindedir ve $i_b(b) = b$ olur.

Tanım 12.7. *A kümesinden B kümesine bir R bağıntısı verilsin. R* ***bağıntısının tersi****, B kümesinden A kümesine tanımlı $R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}$ bağıntısıdır. Başka bir deyişle R'nin tersi, R'deki her sıralı ikilinin bileşenlerinin sırası değiştirerek elde edilen R^{-1} bağıntısıdır.*

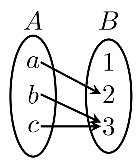
Örneğin, $A = \{a,b,c\}$ ve $B = \{1,2,3\}$ olmak üzere $f = \{(a,2),(b,3),(c,1)\}$ kümesi A'dan B'ye bir bağıntıdır. Buna göre $f^{-1} = \{(2,a),(3,b),(1,c)\}$ kümesi de B'den A'ya bir bağıntıdır. Dikkat edilirse f bağıntısı A'dan B'ye bir fonksiyondur; f^{-1} bağıntısı ise B'den A'ya bir fonksiyondur. Bu bağıntıların grafikleri aşağıda verilmiştir. Görüleceği üzere f^{-1} bağıntısının grafiği, f bağıntısının grafiğindeki okların ters çevrilmesi ile elde edilmiştir.

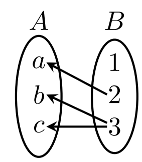




$f = \{(a,2),(b,3),(c,1)\}$ $\quad$ $f^{-1} = \{(2,a),(3,b),(1,c)\}$

Başka bir örnek olarak, A ve B yukarıda verilen kümeler olmak üzere, A'dan B'ye tanımlı $g = \{(a,2),(b,3),(c,3)\}$ bağıntısını göz önüne alalım. Buna göre $g^{-1} = \{(2,a),(3,b),(3,c)\}$ kümesi B'den A'ya bir bağıntıdır. Bu iki bağıntıya ait grafikler aşağıda verilmiştir.





$g = \{(a,2),(b,3),(c,3)\}$ $\quad$ $g^{-1} = \{(2,a),(3,b),(3,c)\}$

Bu sefer, g bir fonksiyon olsa da, g^{-1} ters bağıntısı bir fonksiyon değildir çünkü 3 tamsayısı g^{-1} kümesindeki iki faklı sıralı ikilinin ilk bileşeni olarak kullanılmıştır.

Yukarıda verilen örneklerdeki f ve g bağıntıları birer fonksiyondur. Buna karşılık f^{-1} bir fonksiyondur fakat g^{-1} değildir. Bu şu soruyu akla getirir: f bağıntısında olup g bağıntısında olmayan hangi özellik f^{-1} kümesini bir fonksiyon yaparken g^{-1} kümesinin bir fonksiyon olmasına engel olur. Bunun cevabını görmek zor değildir. Dikkat edilirse $g(b) = g(c) = 3$ olduğu için g birebir değildir. Burada $(b,3)$ ve $(c,3)$ sıralı ikilileri g bağıntısının elemanlarıdır. Bu durum g^{-1} için bir problem teşkil eder çünkü $(3,b)$ ve $(3,c)$ sıralı ikilileri g^{-1} bağıntısının birer elemanı olduğu için g^{-1} bir fonksiyon olamaz. Böylece g^{-1} bağıntısının bir fonksiyon olabilmesi için g mutlaka birebir olmalıdır.

Fakat bu tek başına yeterli değildir. Ayrıca g fonksiyonu örten değildir çünkü A kümesinin hiçbir elemanı, B kümesindeki 1 elemanına gönderilmemiştir. Bu durum g^{-1} bağıntısında, ilk bileşeni 1 olan bir sıralı ikili olmadığı anlamına gelir. Bu nedenle B'den A'ya bir fonksiyon olamaz. Eğer g^{-1} bir fonksiyon olacaksa g mutlaka örten olmalıdır.

Önceki iki paragraf, g bir fonksiyonken g^{-1} ters bağıntısının da bir fonksiyon olması halinde onun birebir ve örten olması gerektiğini ileri sürer. Bunu doğrulamak gerçekten kolaydır. Karşıt olarak, eğer bir fonksiyon birebir ve örten ise onun ters bağıntısının bir fonksiyon olduğu kolaylıkla görülebilir. Bunu aşağıdaki teoremde özetleyelim.

Teorem 12.3. *Herhangi bir $f : A \to B$ bir fonksiyonu verilsin. Buna göre, f birebir ve örtendir (yani eşlemedir) ancak ve ancak f^{-1} ters bağıntısı B kümesinden A kümesine bir fonksiyondur.*

Kabul edelim ki $f : A \to B$ birebir ve örten olsun. Yukarıdaki teoreme göre f^{-1} bir fonksiyondur. Dikkat edilirse, $x \in A$ olmak üzere, f bağıntısı $(x, f(x))$ formundaki bütün sıralı ikilileri içerir. Bu nedenle f^{-1} bağıntısı $(f(x), x)$ formundaki bütün sıralı ikilileri içerir. Fakat $(f(x), x) \in f^{-1}$ olması $f^{-1}(f(x)) = x$ olması anlamına gelir. Böylece her $x \in A$ için $f^{-1} \circ f(x) = x$ olur. Buradan $f^{-1} \circ f = i_A$ elde ederiz. Benzer akıl yürütme ile $f \circ f^{-1} = i_B$ elde edilir. Bu durum bizi aşağıdaki tanımlara yönlendirir.

Tanım 12.8. *Eğer $f : A \to B$ birebir ve örten ise **tersi**, $f^{-1} : B \to A$ bir fonksiyonudur. Buna göre f ve f^{-1} fonksiyonları $f^{-1} \circ f = i_A$ ve $f \circ f^{-1} = i_B$ koşullarını sağlar.*

Cebir ve analiz derslerinden, birebir ve örten bir f fonksiyonunun tersini bulmak için kullanılan şu yöntemi muhtemelen hatırlarsınız: f^{-1} fonksiyonunu bulmak için $y = f(x)$ denklemiyle başlanır. Daha sonra değişkenlerin yerleri değiştirilerek $x = f(y)$ elde edilir. Bu denklem (eğer mümkün ise) y için çözülerek $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunur. Sonraki iki örnek bu konuyu ele almaktadır.

Örnek 12.13. Dikkat edilirse $f(x) = x^3 + 1$ olarak tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu birebir ve örtendir. Bunun tersini bulunuz.

İlk önce $y = x^3 + 1$ yazarak başlayalım. Değişkenlerin yerlerini değiştirerek $x = y^3 + 1$ elde ederiz. Bu denklemi çözerek $y = \sqrt[3]{x-1}$ buluruz. Böylece

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

olur. (Bulduğumuz sonucu şu şekilde kontrol edebilirsiniz:

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{f(x)-1} = \sqrt[3]{x^3+1-1} = x.$$

Böylece $f^{-1}(f(x)) = x$ olur. Burada x değerinden farklı elde edilecek her sonuç yapılan yanlışa işaret eder.)

Son bir örnekle bu konuyu bitirelim. Örnek 12.5, $g(m, n) = (m + n, m + 2n)$ formülü ile tanımlı $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fonksiyonunun birebir ve örten olduğu göstermiştir. Bu fonksiyonun tersini bulalım. Bunun için yukarıda özetlenen yaklaşım uygulanabilir ancak $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kümesindeki koordinatları dikkatli bir şekilde takip etmemiz gerekir. İlk önce $(x, y) = g(m, n)$ yazarak başlar ve (x, y) ile (m, n) değişkenlerinin yerlerini değiştirirsek $(m, n) = g(x, y)$ elde ederiz. Bu ifade $(m, n) = (x + y, x + 2y)$ anlamına gelir. Buradan

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & m \\ x & + & 2y & = & n \end{array}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemi bildiğimiz cebirsel yöntemlerle çözerek

$$\begin{aligned} x &= 2m - n \\ y &= n - m \end{aligned}$$

buluruz. Buna göre $(x, y) = (2m - n, n - m)$ ve böylece $\boxed{g^{-1}(m, n) = (2m - n, n - m)}$ elde ederiz.

Bulduğumuz sonucu, $g^{-1}(g(m, n)) = (m, n)$ olduğunu göstererek kontrol edebiliriz:

$$\begin{aligned} g^{-1}(g(m,n)) &= g^{-1}(m+n, m+2n) \\ &= \big(2(m+n) - (m+2n), (m+2n) - (m+n)\big) \\ &= (m, n)\,. \end{aligned}$$

Alıştırmalar

1. Bir $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $f(n) = 6 - n$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir ve örten olduğunu gösteriniz. Daha sonra f^{-1} fonksiyonunu bulunuz.

2. Bölüm 12.2'deki 9. alıştırmada, $f(x) = 5x + 1$ olarak tanımlı $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{5\}$ fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu ispatladınız. Şimdi bunun tersini bulunuz.

3. $B = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots\}$ olsun. Buna göre $f(n) = 2^n$ olarak tanımlı $f : \mathbb{Z} \to B$ fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu gösteriniz. Daha sonra tersini bulunuz.

4. $f(x) = e^{x^3+1}$ ile tanımlı $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$ fonksiyonu birebir ve örtendir. Bunun tersini bulunuz.

5. $f(x) = \pi x - e$ ile tanımlı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu birebir ve örtendir. Bunun tersini bulunuz.

6. $f(m, n) = (5m + 4n, 4m + 3n)$ formülü ile tanımlı $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ fonksiyonu birebir ve örtendir. Bunun tersini bulunuz.

7. Bir $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x, y) = ((x^2 + 1)y, x^3)$ formülü ile tanımlansın. Bu fonksiyonun birebir ve örten olduğunu gösteriniz. Daha sonra tersini bulunuz.

8. Bir $\theta : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ fonksiyonu $\theta(X) = \overline{X}$ formülü ile tanımlansın. Bu fonksiyon birebir ve örten midir? Eğer öyle ise tersi nedir?

9. Bir $f : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x, y) = (y, 3xy)$ ile tanımlansın. Bunun birebir ve örten olduğunu doğrulayıp tersini bulunuz.

10. Bölüm 12.2'deki 18. alıştırmaya göre $f(n) = \dfrac{(-1)^n(2n-1)+1}{4}$ olarak tanımlı $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonunu birebir ve örtendir. Bunun tersini bulunuz.

12.6 Görüntü ve Ters Görüntü

Gelecekte alacağınız matematik derslerinde karşılaşacağınız bir notasyon konusunu ele almanın zamanı geldi. Kabul edelim ki $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun. Eğer $X \subseteq A$ ise $f(X)$ ifadesi özel bir anlam taşır: $\{f(x) : x \in X\}$ kümesini ifade eder. Benzer şekilde, $Y \subseteq B$ ise f tersi olan bir fonksiyon olmasa bile $f^{-1}(Y)$ ifadesi de bir anlam taşır: $\{x \in A : f(x) \in Y\}$ altkümesini temsil eder. Bunların net tanımları şu şekildedir.

Tanım 12.9. *Kabul edelim ki $f : A \to B$ bir fonksiyon olsun.*

1. *Eğer $X \subseteq A$ ise X kümesinin **görüntüsü** $f(X) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$ kümesidir.*
2. *Eğer $Y \subseteq B$ ise Y'nin **ters görüntüsü** $f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\} \subseteq A$ kümesidir.*

Kelimelerle ifade edersek X kümesinin $f(X)$ ile gösterilen görüntüsü; f ile X'den gönderilmiş olan B içerisindeki bütün elemanların kümesidir. (Kabaca söylersek $f(X)$ kümesini, X'in B'deki biçimsiz bir "kopyası" veya "imgesi" olarak düşünebilirsiniz.) Öbür yandan Y kümesinin $f^{-1}(Y)$ ile gösterilen ters görüntüsü; f ile Y'ye gönderilmiş olan A içerisindeki bütün elemanların kümesidir.

Bu kavramlarla Lineer Cebirde, iki vektör uzayı arasındaki $T : V \to W$ lineer dönüşümünü içeren bir ortamda karşılaşmış olabilirsiniz. Eğer $X \subseteq V$ kümesi V'nin bir alt uzayı ise $T(X)$ görüntü kümesi de W'nun bir alt uzayıdır. Eğer $Y \subseteq W$ kümesi W'nun bir alt uzayı ise $T^{-1}(Y)$ ters görüntü kümesi de V'nin bir alt uzayıdır. (Eğer tanıdık gelmediyse bunları görmezden gelebilirsiniz.)

Örnek 12.14. Bir $f : \{s, t, u, v, w, x, y, z\} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ fonksiyonu

$$f = \{(s, 4), (t, 8), (u, 8), (v, 1), (w, 2), (x, 4), (y, 6), (z, 4)\}$$

olarak tanımlansın. Dikkat edilirse f ne birebir ne de örtendir. Bu nedenle f fonksiyonunun tersi yoktur. Aşağıdaki ifadeleri anladığınızdan emin olunuz.

1. $f(\{s, t, u, z\}) = \{8, 4\}$
2. $f(\{s, x, z\}) = \{4\}$
3. $f(\{s, v, w, y\}) = \{1, 2, 4, 6\}$
4. $f^{-1}\{(4)\} = \{s, x, z\}$
5. $f^{-1}(\{4, 9\}) = \{s, x, z\}$
6. $f^{-1}(\{9\}) = \varnothing$

7. $f^{-1}(\{1,4,8\}) = \{s,t,u,v,x,z\}$

Tanım 12.9'daki X ve Y ifadeleri, A ve B kümelerinin birer (elemanı değil!) altkümesidir. Bunun farkında olmak önemlidir. Örneğin, yukarıda $f^{-1}(\{4\}) = \{s,x,z\}$ elde edilmiştir; buna karşılık $f^{-1}(4)$ ifadesi tamamen anlamsızdır çünkü f^{-1} fonksiyonu tanımsızdır. Benzer şekilde $f(\{s\}) = \{4\}$ ve $f(s) = 4$ ifadeleri arasında ince bir fark vardır. Bunlara dikkat edilmelidir.

Örnek 12.15. Kabul edelim ki $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x^2$ olarak tanımlansın. Dikkat edilirse $f(\{0,1,2\}) = \{0,1,4\}$ ve $f^{-1}(\{0,1,4\}) = \{-2,-1,0,1,2\}$ olur. Bu örnek, genel olarak $f^{-1}(f(X)) \neq X$ olduğunu gösterir.

Aynı f fonksiyonunu kullanarak $f([-2,3]) = [0,9]$ ve $f^{-1}([0,9]) = [-3,3]$ olduğu görülebilir. Ayrıca $f(\mathbb{R}) = [0,\infty)$ ve $f^{-1}([-2,-1]) = \varnothing$ olur. Aralıkların görüntü ve ters görüntü kümelerini içeren bu önermeleri kavradığınızdan emin olunuz.

Matematik öğrenmeye devam ederseniz aşağıdaki sonuçlarla karşılaşmanız muhtemeldir. Şimdilik bunları alıştırmalar kısmında ispatlamanız istenmektedir.

Teorem 12.4. *Kabul edelim ki $f : A \to B$ bir fonksiyon; $W, X \subseteq A$ ve $Y, Z \subseteq Y$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır:*

1. $f(W \cap X) \subseteq f(W) \cap f(X)$
2. $f(W \cup X) = f(W) \cup f(X)$
3. $f^{-1}(Y \cap Z) \subseteq f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$
4. $f^{-1}(Y \cup Z) \subseteq f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$
5. $X \subseteq f^{-1}(f(X))$
6. $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

Alıştırmalar

1. Bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonun $f = x^2+3$ olarak tanımlansın. Buna göre $f([-3,5])$ ve $f^{-1}([12,19])$ kümelerini bulunuz.

2. Bir $f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ fonksiyonu

$$f = \{(1,3),(2,8),(3,3),(4,1),(5,2),(6,4),(7,6)\}$$

ile verilsin. Buna göre $f(\{1,2,3\})$, $f(\{4,5,6,7\})$, $f(\varnothing)$, $f^{-1}(\{0,5,9\})$ ve $f^{-1}(\{0,3,5,9\})$ kümelerini bulunuz.

3. Bu problem $f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{0,1,2,3,4\}$ olarak tanımlanabilecek fonksiyonlarla ilgilidir. Bu fonksiyonlardan kaç tanesi $|f^{-1}(\{3\})| = 3$ özelliğine sahiptir?

4. Bu problem $f : \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{0,1,2,3,4,5,6\}$ olarak tanımlanabilecek fonksiyonlarla ilgilidir. Bu fonksiyonlardan kaç tanesi $|f^{-1}(\{2\})| = 4$ özelliğine sahiptir?

5. Bir $f : A \to B$ fonksiyonunu ve $X \subseteq A$ altkümesini göz önüne alalım. Bölüm 12.6'da, genel olarak $f^{-1}(f(X)) \neq X$ olduğunu gözlemledik. Ancak $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ ifadesi her zaman doğrudur. Bunu ispatlayınız.

6. Bir $f : A \to B$ fonksiyonu ve $Y \subseteq B$ altkümesi verildiğinde, $f(f^{-1}(Y)) = Y$ ifadesi her zaman doğru mudur? Bunu ispatlayınız ya da aksine bir örnek veriniz.

7. Bir $f : A \to B$ fonksiyonu ve $W, X \subseteq A$ altkümeleri verildiğinde, $f(W \cap X) \subseteq f(W) \cap f(X)$ olduğunu ispatlayınız.

8. Bir $f : A \to B$ fonksiyonu ve $W, X \subseteq A$ altkümeleri verildiğinde, $f(W \cap X) = f(W) \cap f(X)$ ifadesi genel olarak doğru değildir. Bunun için bir aksine örnek üretiniz.

9. Bir $f : A \to B$ fonksiyonu ve $W, X \subseteq A$ altkümeleri verildiğinde, $f(W \cup X) = f(W) \cup f(X)$ olduğunu ispatlayınız.

10. Bir $f : A \to B$ ve $Y, Z \subseteq B$ altkümeleri verildiğinde, $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$ olduğunu ispatlayınız.

11. Bir $f : A \to B$ ve $Y, Z \subseteq B$ altkümeleri verildiğinde, $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$ olduğunu ispatlayınız.

12. Bir $f : A \to B$ fonksiyonunu ele alalım. İlk önce f birebirdir ancak ve ancak her $X \subseteq A$ için $X = f^{-1}(f(X))$, olduğunu ispatlayınız. Daha sonra f örtendir ancak ve ancak her $Y \subseteq B$ için $f(f^{-1}(Y)) = Y$, olduğunu ispatlayınız.

13. Kabul edelim ki $f : A \to B$ bir fonksiyon ve $X \subseteq A$ olsun. Doğrulayınız ya da çürütünüz: $f(f^{-1}(f(X))) = f(X)$.

14. Kabul edelim ki $f : A \to B$ bir fonksiyon ve $Y \subseteq B$ olsun. Doğrulayınız ya da çürütünüz: $f^{-1}(f(f^{-1}(Y))) = f(Y)$.

Bölüm 13

Kardinalite

Bu ünitenin tamamı kümelerin kardinaliteleri hakkındadır. İlk bakışta bu çok basit bir konuymuş gibi algılanabilir. Bir kümenin kalitesini bulmak için onun elemanlarını saymak yeterlidir. Örneğin, $A = \{a, b, c, d\}$ ise $|A| = 4$ ve $B = \{n \in \mathbb{Z} : -5 \leqslant n \leqslant 5\}$ ise $|B| = 11$ olur. Buradan $|A| < |B|$ elde edilir. Bundan daha basit ne olabilir ki?

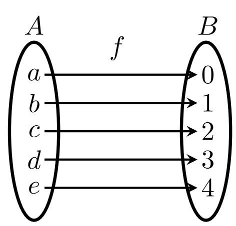
Aslında, sonsuz kümelerdeki kardinalite kavramı oldukça karmaşıktır. Bu ünitenin ana teması, çok sayıda farklı sonsuzluk olduğunu ve bazı sonsuzlukların diğerlerinden daha büyük olduğunu açıklamaktır. Her ikisi de sonsuz kardinaliteye sahip A ve B kümeleri için $|A| < |B|$ olabilir.

13.1 Eşit Kardinaliteli Kümeler

İki kümenin aynı kardinaliteye sahip olmasının ne anlama geldiğini tartışarak işe başlayalım. Bu noktaya kadar, A ve B kümelerinin aynı sayıda elemanı olması halinde $|A| = |B|$ olduğunu söyledik. Buna göre ilk önce A kümesinin daha sonra da B kümesinin elemanları sayılır. Eğer aynı sayı elde edilirse $|A| = |B|$ olur.

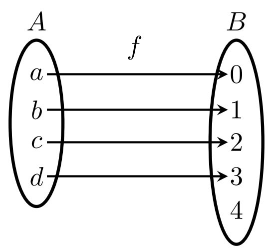
Bu strateji, sonlu (ve çok büyük olmayan!) kümelerde işe yarar ancak sonsuz kümeler için geçerli değildir. Çünkü sonsuz kümelerin elemanları saymakla hiçbir zaman bitmez. Bu nedenle hem sonlu hem de sonsuz kümelerde geçerli yeni bir yaklaşıma ihtiyaç duyarız. Bu yaklaşım aşağıda verilmiştir:

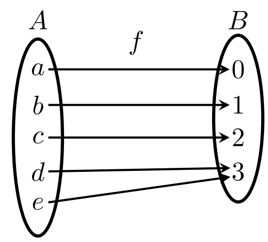
Tanım 13.1. *Bir eşleme olacak şekilde bir $f : A \to B$ fonksiyonu var ise A ve B kümeleri* ***aynı kardinalitelidir****. Bu durumda $|A| = |B|$ yazılır. Eğer böyle bir eşleme yok ise iki kümenin* ***kardinaliteleri farklıdır****. Bir başka ifadeyle $|A| \neq |B|$ olur.*



Yukarıdaki şekil, verdiğimiz tanıma bir örnektir. Birebir ve örten bir $f : A \to B$ fonksiyonu var olduğu için $|A| = |B|$ olur. Aslında f fonksiyonu A ve B kümelerini eşleştirir. Bu fonksiyonu, A kümesinin B üzerine mükemmel bir uyum sağlayacak şekilde nasıl yerleştirilebileceğini gösteren yöntem olarak düşünebiliriz.

Öte yandan A ve B aşağıdaki şekillerden herhangi birinde gösterildiği gibi ise bir $f : A \to B$ eşlemesi yoktur. (Elimizden gelenin en iyisi, ya birebir ya da örten ancak her ikisi birden olmayan bir fonksiyondur.) Tanım, böyle durumlarda $|A| \neq |B|$ olduğunu söyler.





Örnek 13.1. $A = \{n \in \mathbb{Z} : 0 \leqslant n \leqslant 5\}$ ve $B = \{n \in \mathbb{Z} : -5 \leqslant n \leqslant 0\}$ kümeleri aynı kardinalitelidir çünkü $f(n) = -n$ kuralı ile tanımlanmış $f : A \to B$ fonksiyonu bir eşlemedir.

Sırasıyla şu yorumları yapabiliriz. Birincisi, eğer $|A| = |B|$ ise A kümesinden B kümesine birçok eşleme yani bijektif fonksiyon olabilir. Ancak $|A| = |B|$ sonucunu çıkarmak için bunlardan sadece bir tanesini bulmak yeterlidir. İkincisi, bijektif fonksiyonlar burada büyük bir rol oynamaktadır. Bunlara kısaca **bijeksiyon** diyebiliriz. Bu bağlamda Örnek 13.1'deki $f(n) = -n$ fonksiyonu bir bijeksiyondur. Ayrıca injektif fonksiyonlara **injeksiyon**, surjektif fonksiyonlara da **surjeksiyon** denir.

Tekrar vurgulayacak olursak Tanım 13.1, hem sonlu hem de sonsuz kümeler için geçerlidir. A ve B kümeleri sonsuz olduğunda bir $f : A \to B$ eşlemesi var ise $|A| = |B|$ olur. Eğer böyle bir eşleme yok ise $|A| \neq |B|$ olur.

Örnek 13.2. Bu örnek $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ olduğunu gösterir. Bunun neden doğru olduğuna bakalım. Aşağıdaki tablo, bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ eşlemesi tanımlar:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
$f(n)$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	6	-6	7	-7	...

Dikkat edilirse f hem birebir hem de örten olacak şekilde tanımlanmıştır. Her tamsayı, sonsuz uzunluktaki ikinci satırda sadece bir defa kullanılmıştır. Bu tabloya göre, herhangi bir $b \in \mathbb{Z}$ için $f(n) = b$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. Buna göre f örtendir. Tablonun oluşturuma şekli, $m \neq n$ olduğunda $f(m) \neq f(n)$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla f birebirdir. Böylelikle $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu bir eşleme olduğu için Tanım 13.1'den $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ sonucunu çıkarabiliriz.

Örnek 13.2 biraz kafa karıştırıcı olabilir. Bir taraftan, $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ sonsuz oldukları için $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ ifadesi anlamlıdır çünkü bunların her ikisinin kardinalitesi de "sonsuz"dur. Öte tarafdan, $\mathbb{Z}$ kümesi $\mathbb{N}$ kümesinin iki katıymış gibi görünebilir çünkü $\mathbb{Z}$ kümesi, pozitiflerin yanı sıra tüm negatif tamsayıları da içerir. Tanım 13.1, bu belirsizliğe son verir. Çünkü birebir ve örten $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu, $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ kümelerini eşleştirdiği için $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ olur. Bunu bir teoremle özetleyelim.

Teorem 13.1. *Bir eşleme olacak şekilde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu vardır. Bu nedenle $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ olur.*

$\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ kümelerinin aynı kardinaliteli olması, bizi diğer sonsuz kümelerin kardinalitelerini karşılaştırmaya teşvik eder. Örneğin, $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{R}$ nasıl karşılaştırılır? Şimdi dikkatimizi bu konuya çevirelim.

Aslında $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$'dir. Bu gözlem ilk olarak, örten bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun olamayacağını zekice bir argüman kullanarak gösteren Georg Cantor (1845-1918) tarafından yapılmıştır. (Böylece, bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eşlemesi var olmayacağı için Tanım 13.1'e göre $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ olur.)

Şimdi, örten bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun neden olmadığını ifade eden Cantor'un argümanını açıklayalım. Tam bir ispat yazmak yerine bunu gayriresmi bir şekilde açıklayalım. Rastgele bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ele alalım. İşte bu f fonksiyonunun neden örten olamayacağının nedeni:

Bu fonksiyon için sol tarafa $n \in \mathbb{N}$ değerlerini, sağ tarafa da $f(n)$ değerlerini yazdığımız bir tablo oluşturduğumuzu düşünelim. Böyle bir tablonun ilk bir kaç satırı aşağıdakine benzer. Bu tabloda, $f(n)$ reel sayısının tüm ondalık basamakları sağ tarafa açılacak şekilde yazılmıştır. Buna göre örneğin, $f(1)$ sayısının değeri 0.4 olsa bile bu sayı $0.40000000\ldots$ vb. olarak yazılmıştır.

n	$f(n)$
1	0 . 4 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 . . .
2	8 . 5 0 0 6 0 7 0 8 6 6 6 9 0 0 . . .
3	7 . 5 0 5 0 0 9 4 0 0 4 4 1 0 1 . . .
4	5 . 5 0 7 0 4 0 0 8 0 4 8 0 5 0 . . .
5	6 . 9 0 0 2 6 0 0 0 0 0 0 5 0 6 . . .
6	6 . 8 2 8 0 9 5 8 2 0 5 0 0 2 0 . . .
7	6 . 5 0 5 0 5 5 5 0 6 5 5 8 0 8 . . .
8	8 . 7 2 0 8 0 6 4 0 0 0 0 4 4 8 . . .
9	0 . 5 5 0 0 0 0 8 8 8 8 0 0 7 7 . . .
10	0 . 5 0 0 2 0 7 2 2 0 7 8 0 5 1 . . .
11	2 . 9 0 0 0 0 8 8 0 0 0 0 9 0 0 . . .
12	6 . 5 0 2 8 0 0 0 8 0 0 9 6 7 1 . . .
13	8 . 8 9 0 0 8 0 2 4 0 0 8 0 5 0 . . .
14	8 . 5 0 0 0 8 7 4 2 0 8 0 2 2 6 . . .
$\vdots$	$\vdots$

Tablo üzerinde gri ile boyanmış bir köşegen bulunmaktadır. Bu köşegen, her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n)$ sayısının virgülden sonraki $n-$yinci rakamını içerir.

Köşegen üzerindeki birinci bileşen, $f(1)$ sayısının onda birler basamağındaki rakamıdır.

Köşegen üzerindeki ikinci bileşen, $f(2)$ sayısının yüzde birler basamağındaki rakamıdır.

Köşegen üzerindeki üçüncü bileşen, $f(3)$ sayısının binde birler basamağındaki rakamıdır.

Köşegen üzerindeki dördüncü bileşen, $f(4)$ sayısının on binde birler basamağındaki rakamıdır.

Bu köşegeni, herhangi bir $f(n)$ sayısına eşit olmayan bir $b \in \mathbb{R}$ oluşturmak için kullanabiliriz. Bunun için b sayısının virgülden sonraki $n-$yinci rakamını, köşegen üzerindeki $n-$yinci bileşenden farklı seçmek yeteridir. Böylece b ve $f(n)$ sayılarının virgülden sonraki $n-$yinci rakamları farklı olacaktır. Daha belirgin olması açısından, b tamsayısını 1'den küçük olmak koşulu ile şu şekilde tanımlayalım: Eğer $f(n)$ sayısının virgülden sonraki $n-$yinci rakamı 0 değil ise b'nin virgülden sonraki $n-$yinci rakamı 0 olsun. Ancak $f(n)$ sayısının virgülden sonraki $n-$yinci rakamı 0 ise b'nin virgülden sonraki $n-$yinci rakamı 1 olsun. Böylece, yukarıdaki tabloda verilen f fonksiyonu için

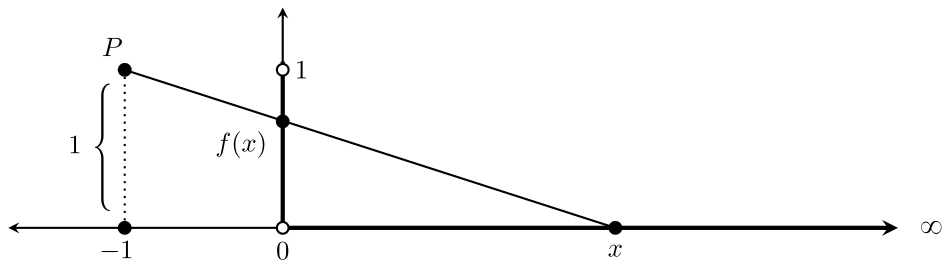
$$b = 0.01010001001000\ldots$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için b sayısının virgülden sonraki $n-$yinci rakamı $f(n)$ sayısının virgülden sonraki $n-$yinci rakamından farklı olacak şekilde tanımlanmıştır. Böylelikle her n doğal sayısı için $f(n) \neq b$ olduğundan f örten değildir.

Bu argüman (sadece yukarıdaki örnektekine değil) *her* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna uygulanabilir olduğu için birebir ve örten bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu yoktur. Bu yüzden Tanım 13.1 gereğince $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ olur. Şimdi bunu bir teoremle özetleyelim.

Teorem 13.2. *Eşleme olacak şekilde bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu yoktur. Bu nedenle $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ olur.*

Bu teorem, sonsuzlukların farklı türde olabileceğinin ilk göstergesidir. Hem $\mathbb{N}$ hem de $\mathbb{R}$ sonsuzdur fakat $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ olur. Bu bölüm boyunca bu temayı geliştirmeye devam edeceğiz. Bir sonraki örnek, $\mathbb{R}$ üzerindeki $(0, \infty)$ ve $(0, 1)$ aralıklarının aynı kardinaliteye sahip olduğunu gösterir.



Şekil 13.1: Bir $f : (0, \infty) \to (0, 1)$ eşlemesi

Örnek 13.3. $|(0, \infty)| = |(0, 1)|$ olduğunu gösteriniz.

Bu eşitliği doğrulamak için eşleme olacak biçimde bir $f : (0, \infty) \to (0, 1)$ fonksiyonunun var olduğunu göstermemiz gerekir. Bu fonksiyonu geometrik olarak tanımlayalım. Bunun için $(0, \infty)$ aralığını $\mathbb{R}^2$ düzlemindeki pozitif $x-$ekseni olarak düşünelim. Şekil 13.1'de gösterildiği gibi $(0, 1)$ aralığı da $y-$ekseni üzerinde olsun. Böylece $(0, \infty)$ ve $(0, 1)$ aralıkları birbirine diktir.

Şekilde ayrıca $P = (-1, 1)$ noktası gösterilmiştir. Şimdi $f(x)$ değerini, P noktasından $x \in (0, \infty)$ noktasına çizilen doğrunun $y-$eksenini $(0, 1)$ aralığı üzerinde kestiği nokta olarak tanımlayalım. Üçgenlerin benzerliğinden

$$\frac{1}{x+1} = \frac{f(x)}{x}$$

ve böylece

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

yazabiliriz. Eğer $f : (0, \infty) \to (0, 1)$ fonksiyonunun bir eşleme olduğu şekilden görünmüyorsa Bölüm 12.2'de verilen yöntemleri kullanarak bunu ispatlayabilirsiniz. (Alıştırma 16, aşağıda.)

Eşit kardinaliteye sahip olmak, kümeler üzerinde bir denklik bağıntısıdır yani yansıyan, simetrik ve geçişmelidir. Şimdi bunu doğrulayalım. Herhangi bir A kümesi göz önüne alındığında, $A \to A$ özdeşlik fonksiyonu bir eşlemedir. Böylece $|A| = |A|$ olur. (Bu, yansıma özelliğidir.) Eğer $|A| = |B|$ ise bir $f : A \to B$ eşlemesi vardır. Buna göre $f^{-1} : B \to A$ ters fonksiyonu da bir eşlemedir. Böylece $|B| = |A|$ olur. (Bu da simetri özelliğidir.) Geçişme özelliği için $|A| = |B|$ ve $|B| = |C|$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f : A \to B$ ve $g : B \to C$ eşlemeleri vardır. Teorem 12.2 gereğince $g \circ f : A \to C$ fonksiyonu da bir eşlemedir. Böylece $|A| = |C|$ olur.

Geçişme özelliği kullanışlı olabilir. Herhangi iki A ve C kümelerinin aynı kardinaliteye sahip olduğunu göstermeye çalışırken, $|A| = |B|$ ve $|B| = |C|$ olacak şekilde üçüncü bir küme üretebiliriz. Bu durumda geçişme özelliği bize $|A| = |C|$ olduğunu söyler. Bir sonraki örnek bu yöntemi kullanır.

Örnek 13.4. $|\mathbb{R}| = |(0, 1)|$ olduğunu gösteriniz.

Dikkat edilirse $g(x) = 2^x$ ile tanımlı $g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ fonksiyonu bir eşlemedir. Buradan $|\mathbb{R}| = |(0, \infty)|$

bulunur. Ayrıca Örnek 13.3, $|(0,\infty)| = |(0,1)|$ olduğunu gösterir. Böylece $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$ elde edilir.

Bu bölümde şu ana kadar, aralarında bir eşleme olan kümelerin "aynı kardinaliteye" sahip olduklarını beyan ettik. Aralarında bir eşleme bulunmayan kümeler "farklı kardinaliteye" sahiptir. Bu fikri kullanarak $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}| = |(0,\infty)| = |(0,1)|$ olduğunu gösterdik. Dolayısıyla iki kümenin aynı ya da farklı kardinaliteye sahip olduğunu belirleyecek bir yönteme sahibiz. Ancak kardinalitenin ne olduğunu söylemekten özellikle kaçındık. Örneğin, $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ olduğunu söyleyebiliriz ancak $|\mathbb{Z}|$ veya $|\mathbb{N}|$ tam olarak neyi ifade eder? Bunların eşit oldukları şey tam olarak nedir? Cevap kesinlikle birer sayı değildir çünkü bunlar çok büyüktür. Aynı zamanda, cevabın "sonsuz" olduğunu söylemek de çok doğru değildir çünkü bildiğimiz üzere çok farklı sonsuzluk türleri vardır. Buna göre $|\mathbb{Z}|$ ne tür bir matematiksel varlıktır? Daha genel olarak, bir X kümesi göz önüne alındığında, bunun kardinalitesi $|X|$ tam olarak nedir?

Bu aslında bir sayının ne olduğunu sormak gibi bir şeydir. Bir sayı, örneğin 5, soyut bir kavramdır, fiziksel bir nesne değildir. Yaşamın başlangıcında bazı şeyleri içgüdüsel olarak gruplandırdık (beş elma, beş portakal, vb.) ve 5 sayısını kümelerin hepsinde ortak olan bir şey olarak düşündük. En gerçek anlamda, 5 sayısı bu kümelerin birebir ve örten bir fonksiyonla eşlenebileceğin soyut bir göstergesidir. Bir başka deyişle "*aynı kardinaliteye sahip olma*" bağıntısı altında, kümelerin belirli bir denklik sınıfı 5 ile özdeşlenebilir. (Bunun bir denklik bağıntısı olduğunu hatırlayın.) Bunu kavramak kolaydır çünkü sayısal nicelikleri kavrama duyumuz doğuştan gelir. Aynı şekilde bir X kümesinin kardinalitesinin, birebir ve örten bir fonksiyon ile X kümesine eşlenebilen bütün kümeler için ortak olan şey olduğunu söyleyebiliriz. Bunu kavramak biraz zor olabilir ancak gerçekten de bu (sonlu) bir sayının büyüklüğü fikrinden farklı değildir.

Aslında daha somut davranabilir ve $|X|$ ifadesini, X kümesi ile aynı kardinaliteye sahip kümelerin denklik sınıfı olarak tanımlayabiliriz. Bu tanımın, $|X|$ ifadesine açıkça bir anlam vermek gibi bir avantajı vardır. Ancak sezgisel yaklaşımı benimseyip, X kümesinin "büyüklüğünün" ölçüsünü $|X|$ olarak yorumlamanın herhangi bir zararı yoktur. Bu bölümün amacı, iki kümenin aynı büyüklüğe mi yoksa farklı büyüklüklere mi sahip olduğuna karar verebilmektir.

Alıştırmalar

A. Aşağıda verilen kümelerin eşit kardinaliteli olduklarını, birinden diğerine birebir ve örten bir fonksiyon tanımlayarak gösteriniz. Bu fonksiyonu (tablo ile değil de) bir kural olarak veriniz.

1. $\mathbb{R}$ ve $(0,\infty)$
2. $\mathbb{R}$ ve $(\sqrt{2},\infty)$
3. $\mathbb{R}$ ve $(0,1)$
4. Tek tamsayılar kümesi ve çift tamsayılar kümesi.
5. $A = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$ ve $B = \{7k : k \in \mathbb{Z}\}$

6. $\mathbb{N}$ ve $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
7. $\mathbb{Z}$ ve $S = \left\{\ldots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16 \ldots\right\}$
8. $\mathbb{Z}$ ve $S = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 1\}$
9. $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ ve $\mathbb{N}$
10. $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$
11. $(0,1)$ ve $[0,1]$.
12. $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ (Yol gösterme: Bölüm 12.2'deki Alıştırma 18'i kullanabilirsiniz.)
13. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ve $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ (Yol gösterme: Yukarıdaki 12. alıştırmayı kullanabilirsiniz.)
14. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve $\{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \leqslant m\}$

B. Bu bölümde verilen birebir ve örten fonksiyonlar ile ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.

(a) Örnek 13.2'deki (sayfa 252) birebir ve örten f fonksiyonunun kuralını bulunuz.

(b) Örnek 13.3'te verilen f fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu gösteriniz.

13.2 Sayılabilir ve Sayılamaz Kümeler

Bir önceki bölümün ana hatlarını özetleyerek başlayalım.

1. $|A| = |B|$ olması için gerek ve yeter şart bir $f : A \to B$ eşlemesinin var olmasıdır.
2. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ olur çünkü bir $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ eşlemesi vardır.
3. $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$ olur çünkü bir $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eşlemesi yoktur.

Böylece $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri sonsuz olmalarına rağmen hepsi eşit kardinaliteli değildir. $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{Z}$ kümeleri aynı kardinaliteye sahiptir ancak $\mathbb{R}$'nin kardinalitesi diğer iki kümenin kardinalitesinden farklıdır. Bu durum, sonsuz kümelerin farklı büyüklüklere sahip olabileceği anlamına gelir. Şimdi bu olgu için kullanacağımız kelime ve sembollerle ilgili birkaç tanım yapalım.

Belirli bir anlamda, $\mathbb{N}$ kümesinin elemanlarını "sayabilirsiniz". Bir başka deyişle, bu elemanları $1, 2, 3, 4, \ldots$ şekline sayabilirsiniz ancak kümenin tamamını saymak için bu süreci sonsuza kadar devam ettirmelisiniz. Bu anlamıyla $\mathbb{N}$ kümesine "*sayılabililir sonsuz küme*" denir. Kardinalitesi $\mathbb{N}$ ile aynı olan kümeler için de aynı terim kullanılır.

Tanım 13.2. *Bir A kümesi verilsin. Eğer $|\mathbb{N}| = |A|$ yani bir $\mathbb{N} \to A$ eşlemesi var ise A kümesi* ***sayılabilir sonsuz*** *kümedir. Eğer A sonsuz ve $|\mathbb{N}| \neq |A|$ yani eşleme olacak şekilde bir $\mathbb{N} \to A$* yok *ise A kümesi* ***sayılamaz*** *bir kümedir.*

Buna göre $\mathbb{Z}$ sayılabilir sonsuz bir kümedir fakat $\mathbb{R}$ sayılamaz bir kümedir. Bu bölüm ağırlıklı olarak sayılabilir sonsuz kümeler ile ilgilidir. Sayılamaz kümeler daha sonra ele alınacaktır.

Eğer A sayılabilir sonsuz küme ise $|\mathbb{N}| = |A|$ olduğu için birebir ve örten bir $f : \mathbb{N} \to A$ vardır. Bu fonksiyonunun, A kümesinin elemanlarını "saydığını" düşünebilirsiniz. Buna göre A kümesinin ilk elemanı $f(1)$, ikinci elemanı $f(2)$, üçüncü elemanı $f(3)$ vb. olur. Sayılabilir sonsuz kümeleri, en küçük sonsuz kümeler olarak düşünmek mantıklıdır çünkü sayma işlemi bittiği an küme sonsuz değil sonlu olmuş olur. Böylece sayılabilir sonsuz kümeler, sonsuz olup da en az elamana sahip olan kümelerdir. Sayılabilir sonsuz kümelerin kardinaliteleri yaygın olarak $\aleph_0$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 13.3. *Doğal sayılar kümesinin kardinalitesi $\aleph_0$ ile gösterilir. Bir başka ifadeyle, $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ yazılır. Böylece sayılabilir sonsuz her kümenin kardinalitesi $\aleph_0$ olur.*

($\aleph$ simgesi, İbranice alfabesinin ilk harfidir ve "alef" diye telaffuz edilir. Buna göre $\aleph_0$ sembolü "alef sıfır" diye okunur.) Bu bölümün başında verilen bilgiler, $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$ ve $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$ olduğunu gösterir.

Örnek 13.5. $E = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ çift tamsayılar kümesi verilsin. Dikkat edilirse $f(n) = 2n$ kuralı ile tanımlanmış olan $f : \mathbb{Z} \to E$ fonksiyonu bir eşlemedir. Buna göre $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |E|$ olduğu için E kümesi sayılabilir sonsuzdur ve $|E| = \aleph_0$ olur.

İşte size önemli bir gözlem: Sayılabilir sonsuz bir A kümesinin elemanları, sonsuz uzunluğa sahip bir $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ listesi şeklide yazılabilir. Bu liste, A kümesinin a_1 elemanı ile başlar ve bütün elemanlarını içerir. Örneğin, yukarıda verilen E kümesinin elemanları $0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, 8, -8, \ldots$ şeklinde listelenebilir. Bunun yapılabilmesinin sebebi şudur: A kümesi sayılabilir sonsuz olduğu için Tanım 13.2, bir $f : \mathbb{N} \to A$ eşlemesinin var olduğunu belirtir. Bu eşleme, A kümesinin elemanlarını $f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots$ şeklinde listelememize olanak verir. Karşıt olarak, A kümesinin elemanları $a_1, a_2, a_3, \ldots$ şeklinde listelenebilirse $f(n) = a_n$ kuralı ile tanımlanmış olan $f : \mathbb{N} \to E$ fonksiyonu bir eşlemedir. Böylece A sayılabilir sonsuz bir kümedir. Bunu şu şekilde özetleyebiliriz.

Teorem 13.3. *Bir A kümesi sayılabilir sonsuzdur ancak ve ancak A kümesinin elemanları sonsuz bir $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ listesi şeklinde yazılabilir.*

Bu teoremin nasıl kullanılacağına dair bir örnek olarak P ile göstereceğimiz asal sayılar kümesini ele alalım. Bu kümenin elemanlarını $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ şeklinde listeleyebildiğimiz için P kümesi sayılabilir sonsuzdur.

Teorem 13.3'ün başka bir sonucu olarak $\mathbb{R}$ kümesinin sayılabilir sonsuz olmamasını, $\mathbb{R}$'nin bütün elemanlarını sonsuz bir liste halinde yazmanın imkansız olması şeklinde yorumlayabiliriz. (Nihayetinde bunu sayfa 253'daki tabloda yapmak istedik ve başarısız olduk!)

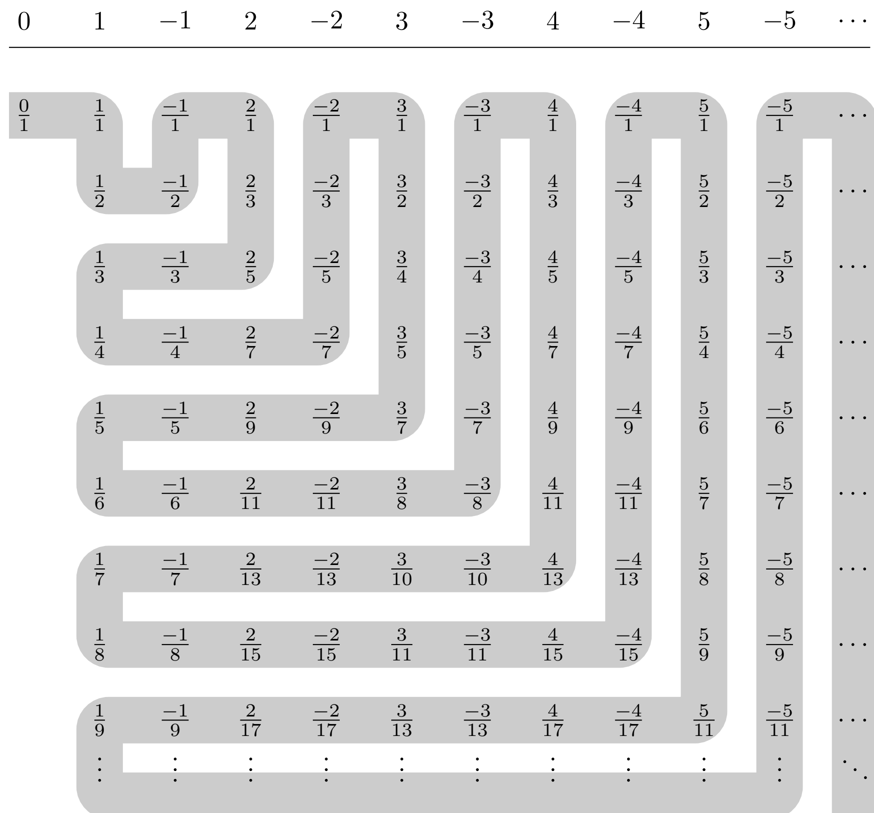
Burada akla gelen soru şudur: $\mathbb{Q}$ kümesinin bütün elamanlarını sonsuz bir liste olarak yazmak imkansız mıdır? Bir başka deyişle $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi sayılabilir sonlu mudur yoksa sayılamaz mıdır? Rasyonel sayıları reel sayı doğrusu üzerinde işaretlemeye çalıştığınızda, bunların $\mathbb{R}$'yi büyük ölçüde doldurduğunu görebilirsiniz. Elbette ki $\sqrt{2}$, π ve e gibi bazı sayılar işaretlenmeyecektir ancak rasyonel sayıları temsil eden noktalar baskın görünecektir. Buna göre $\mathbb{Q}$ kümesinin sayılamaz olmasını bekleyebiliriz. Ancak $\mathbb{Q}$'nun sayılabilir olması şaşırtıcı bir gerçektir. Aşağıda verilen ispat, tüm rasyonel sayıları sonsuz uzunlukta bir liste üzerine yerleştirir.

Teorem 13.4. *$\mathbb{Q}$ rasyonel sayıllar kümesi sayılabilir sonsuzdur.*

İspat. Bu teoremi ispatlamak için $\mathbb{Q}$ kümesini bir liste formunda nasıl yazacağımızı göstermeliyiz. Bütün rasyonel sayıları, aşağıdaki tabloda gösterildiği gibi dikdörtgensel sonsuz bir dizi üzerine yerleştirerek başlayalım. Tablonun en üstündeki satır 0'dan başlar ve arttıkça işaret değiştirerek bütün tamsayıları listeler. En tepesinde k tamsayısı olan sütun, payı k olan (en sade formdaki) bütün kesirleri içerir. Örneğin en tepesinde 2 tamsayısını barındıran sütun $\frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \ldots$ vb. kesirleri içerir. Ancak $\frac{2}{2}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \ldots$ vb. kesirleri içermez çünkü bunlar en sade formda değildir. Bunların sadeleştirilmiş halleri, en tepesinde 1 olan sütunda içerilmektedir. Bu tabloyu inceleyerek, $\mathbb{Q}$'daki bütün rasyonel sayıların burada içerildiğine dair kendinizi ikna ediniz.

0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	$\cdots$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{-4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{-5}{1}$	$\cdots$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{-5}{2}$	$\cdots$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{-5}{3}$	$\cdots$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{-4}{7}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{-5}{4}$	$\cdots$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{-2}{9}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{-4}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{-5}{6}$	$\cdots$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{-2}{11}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{-4}{11}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{-5}{7}$	$\cdots$
	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{-3}{10}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{-5}{8}$	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Şimdi $\frac{0}{1}$ sayısından başlayarak, aşağıda gösterildiği gibi ileri geri sarmalayan sonsuz bir yol çizelim. Dikkat edilirse her rasyonel sayı bu yol üzerindedir.



Böylece $\frac{0}{1}$'den başlayan yolu takip ederek bütün rasyonel sayıları içeren sonsuz bir liste elde ederiz:

$$0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{1}, 3, \frac{3}{2}, \ldots$$

Teorem 13.3'e göre $\mathbb{Q}$ kümesi sayılabilir. Bir başka ifade ile $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ olur. □

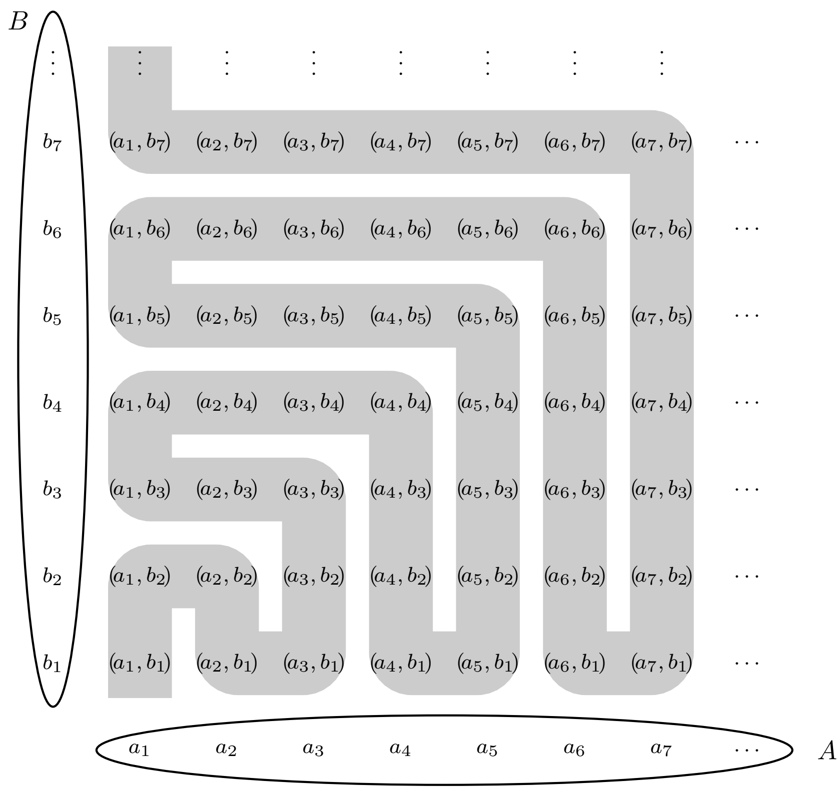
Bir sonraki teoremde belirtildiği üzere, sayılabilir sonsuz iki kümenin kartezyen çarpımı da sayılabilir sonsuzdur.

Teorem 13.5. *Eğer A ve B sayılabilir sonsuz ise $A \times B$ kartezyen çarpımı da sayılabilir sonsuzdur.*

İspat. Kabul edelim ki A ve B sayılabilir sonsuz iki küme olsun. Teorem 13.3'e göre A ve B kümelerinin elemanlarını aşağıdaki şekilde listeleyebiliriz:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\},$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \dots\}.$$

Şekil 13.2, $A \times B$ kümesinin tamamı üzerinde sonsuz bir yol sarmalının nasıl oluşturulacağını göstermektedir. Dolayısıyla $A \times B$ bir liste şeklinde yazılabilir. Bu nedenle sayılabilir sonsuzdur. □



Şekil 13.2: Sayılabilir sonsuz iki kümenin kartezyen çarpımı da sayılabilir sonsuzdur

Bu teoreme bir örnek olarak, $\mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuz olduğu için $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ kümesi de sayılabilir sonsuz bir küme olacağına dikkat ediniz.

"Sonuç" kelimesinin başka bir sonuçtan kolayca yapılan çıkarım anlamına geldiğini hatırlayınız. Teorem 13.5'in bir sonucu şudur:

Sonuç 13.1. *Kabul edelim ki $n \geqslant 2$ olsun. Sayılabilir sonsuz n tane $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ kümeleri verildiğinde $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n$ kartezyen çarpımı da sayılabilir sonsuzdur.*

İspat. İspatı n üzerine tümevarım uygulayarak yapalım. Başlangıç adımı olarak, $n = 2$ olduğunda bu önerme sayılabilir sonsuz A_1 ve A_2 kümeleri için $A_1 \times A_2$ çarpımının da sayılabilir sonsuz olduğunu iddia eder. Bu iddia, Teorem 13.5'den dolayı doğrudur.

Kabul edelim ki $k \geqslant 2$ olmak üzere sayılabilir sonsuz kümelerin $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_k$ kartezyen çarpımı da sayılabilir sonsuz olsun. Buna göre $k+1$ tane sayılabilir sonsuz kümenin $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_{k+1}$ kartezyen çarpımını ele alalım. Kolaylıkla gösterilebileceği üzere

$$\begin{aligned} f : A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots A_k \times A_{k+1} &\to (A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1} \\ f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, x_{k+1}) &= \big((x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k), x_{k+1}\big) \end{aligned}$$

bir eşlemedir. Böylece $|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}| = |(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}|$ olur. Tümevarım hipotezine göre $(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}$ kümesi sayılabilir sonsuz iki kümenin çarpımıdır ve bu nedenle Teorem 13.5'den dolayı sayılabilir sonsuzdur. Yukarıda belirtildiği üzere $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}$ kümesi aynı kardinalitelidir yani o da sayılabilir sonsuzdur. □

Teorem 13.6. *Eğer A ve B sayılabilir sonsuz ise $A \cup B$ de sayılabilir sonsuzdur.*

İspat. Kabul edelim ki hem A hem de B sayılabilir sonsuz olsun. Teorem 13.3'den, A ve B kümelerini

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}, \\ B &= \{b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\}, \end{aligned}$$

formunda listeleyebiliriz. A ve B kümelerini "karıştırıp" bunları $A \cup B$ içinde listeleyebiliriz:

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, \ldots\}.$$

(Burada, hem A hem de B kümesine ait olan bir elemanı iki kez yazmama konusunda anlaşalım.) Böylelikle, Teorem 13.3 gereğince $A \cup B$ sayılabilir sonsuzdur. □

Alıştırmalar

1. $A = \{\ln(n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ kümesinin sayılabilir sonsuz olduğunu ispatlayınız.
2. $A = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \leqslant n\}$ kümesinin sayılabilir sonsuz olduğunu ispatlayınız.
3. $A = \{(5n, -3n) : n \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin sayılabilir sonsuz olduğunu ispatlayınız.
4. İrrasyonel sayılar kümesinin sayılamaz olduğunu ispatlayınız. (Yol gösterme: Teorem 13.4 ve Teorem 13.6'yı olmayana ergi yöntemiyle beraber kullanabilirsiniz.)
5. İspatlayınız ya da çürütünüz: İrrasyonel sayıların, sayılabilir sonsuz bir altkümesi vardır.

6. İspatlayınız ya da çürütünüz: Birebir ve örten olacak şekilde bir $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

7. İspatlayınız ya da çürütünüz:: $\mathbb{Q}^{100}$ sayılabilir sonsuzdur.

8. İspatlayınız ya da çürütünüz: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ sayılabilir sonsuzdur.

9. İspatlayınız ya da çürütünüz: $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$ sayılabilir sonsuzdur.

10. İspatlayınız ya da çürütünüz: $\left\{\frac{\sqrt{2}}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ sayılabilir sonsuzdur.

11. Doğal sayılar kümesini sayılabilir sonsuz sekiz tane altkümeye ayıran bir ayrışım bulunuz.

12. Doğal sayılar kümesini $\aleph_0$ tane sayılabilir sonsuz altkümeye ayıran bir ayrışım tarif ediniz.

13. İspatlayınız ya da çürütünüz: Eğer $A = \{X \subseteq \mathbb{N} : X \text{ sonlu}\}$ ise $A = \aleph_0$ olur.

14. Kabul edelim ki $A = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} : n = \pi m\}$ olsun. $|\mathbb{N}| = |A|$ ifadesi doğru mudur?

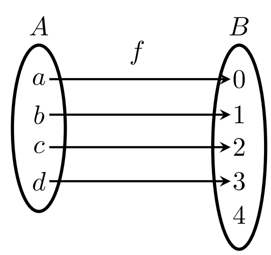
15. Teorem 13.5, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin sayılabilir sonsuz olduğunu belirtir. Buna alternatif bir ispatı, $\varphi(m, n) = 2^{n-1}(2m - 1)$ ile tanımlanmış olan $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonunun bir eşleme olduğunu göstererek yapınız.

13.3 Kardinalitelerin Karşılaştırılması

En az iki tane farklı sonsuzluk olduğunu artık biliyoruz. Bir yanda, kardinalitesi $\aleph_0$ olan $\mathbb{N}$ gibi sayılabilir sonsuz kümeler vardır. Diğer yanda ise sayılabilir olmayan $\mathbb{R}$ vardır. Bunların ötesinde başka sonsuzluk çeşidi var mıdır? Bu sorunun cevabı "evet"tir ancak bunun nedeni görmek için öncelikle bazı tanım ve teoremleri vermemiz gerekmektedir.

İlk olarak, $|A| < |B|$ ile demek istediğimizi ifade eden bir tanım oluşturalım. A ve B sonlu olduğunda bunun tam olarak ne anlama geldiğini biliyoruz: $|A| < |B|$ ifadesi, A ve B kümelerinin elemanları sayıldığında A'nın B'den daha az elemana sahip olması anlamına gelir. Ancak A veya B sonsuz olduğunda bu yöntem işe yaramaz çünkü bunların elemanları sayılmaz.

Bu zorluğun üstesinden gelmek için fonksiyonları kullanabiliriz. Dikkat edilirse A ve B sonlu olduğunda, $|A| < |B|$ olması için gerek ve yeter şart birebir bir $f : A \to B$ fonksiyonun var olması ancak örten hiçbir $f : A \to B$ fonksiyonun olmamasıdır. Aşağıdaki diyagram bunu göstermektedir:



Bu fikri kullanarak $|A| < |B|$ ve $|A| \leqslant |B|$ ile neyi kastettiğimizi tanımlayalım. Burada vurgulamak gerekirse aşağıdaki tanım aynı zamanda $|A| = |B|$ ifadesinin anlamını yeniden ifade eder.

Tanım 13.4. *A ve B iki küme olsun.*

1. *$|A| = |B|$ ifadesi, birebir ve örten yani bir $A \to B$ eşlemenin var olması anlamına gelir.*
2. *$|A| < |B|$ ifadesi, birebir $A \to B$ olması ancak örten hiç $A \to B$ olmaması anlamına gelir.*
3. *$|A| \leqslant |B|$ ifadesi, $|A| < |B|$ veya $|A| = |B|$ olması anlamına gelir.*

Örnek olarak $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerini ele alalım. Dikkat edilirse $f(n) = n$ kuralı ile tanımlanmış $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu birebirdir ancak örten değildir çünkü $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ için $f(n) = \frac{1}{2}$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ yoktur. Bölüm 13.1'de verilen Teorem 13.2, örten olacak şekilde bir $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ olmadığını ileri sürer. Aslında, Tanım 13.4'den

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| \tag{13.1}$$

elde edilir. Bu ise $\aleph_0 < |\mathbb{R}|$ olduğunu söylemenin farklı bir şeklidir.

$|\mathbb{R}| < |X|$ şartını sağlayan bir X kümesi var mıdır? Bunun cevabı "evet"tir ve bir sonraki teorem bunun nedenini açıklayarak $|\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$ olduğunu gösterir. (Hatılancağı üzere $\mathcal{P}(A)$ kümesi, A'nın kuvvet kümesidir.)

Teorem 13.7. *Eğer A herhangi bir küme ise $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ olur.*

İspat. İspata başlamadan önce, bu teoremin sonlu kümeler için açıkça doğru olduğunu belirtelim. Çünkü A sonlu ise $|A| < 2^{|A|} = |\mathcal{P}(A)|$ olur. Fakat ispatımız sonlu ya da sonsuz her A kümesi için geçerli olmalıdır. Bu nedenle Tanım 13.4'ü kullanmamız gerekir.

Teoremi doğrudan ispat yöntemi ile kanıtlayalım. A herhangi bir küme olsun. Tanım 13.4'e göre, $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ olduğunu göstermek için birebir bir $f : A \to \mathcal{P}(A)$ var olduğunu ancak örten hiçbir $f : A \to \mathcal{P}(A)$ olmadığını göstermemiz gerekmektedir.

Birebir bir $f : A \to \mathcal{P}(A)$ var olduğunu göstermek için f fonksiyonunu $f(x) = \{x\}$ kuralı ile tanımlayalım. Kelimelerle ifade edersek f fonksiyonu, A kümesinin x elamanını $\mathcal{P}(A)$ kümesinin tek elemanlı $\{x\}$ kümesine göndermektedir. Buna göre $f : A \to \mathcal{P}(A)$ birebirdir. Çünkü $f(x) = f(y)$ olduğunu kabul edersek $\{x\} = \{y\}$ olur. Dikkat edileceği üzere $\{x\}$ ve $\{y\}$ kümelerinin eşit olmasının tek yolu $x = y$ olmasıdır. O halde f birebirdir.

Şimdi, örten bir $f : A \to \mathcal{P}(A)$ olamayacağını gösterelerim. Bunu olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki örten bir $f : A \to \mathcal{P}(A)$ var olsun. Her $x \in A$ için $f(x) \in \mathcal{P}(A)$ olduğundan $f(x)$ kümesi A'nın bir altkümesidir. Buna göre f fonksiyonu, A'nın elemanlarını A'nın altkümelerine gönderen bir fonksiyondur. Böylece A kümesindeki her x, ya $f(x)$ altkümesinin bir elemanıdır ya da değildir. Bu düşünce ile A kümesinin aşağıda verilen B altkümesini tanımlayalım:

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\} \subseteq A.$$

Şimdi, B kümesi A'nın bir altkümesi olduğu için $B \in \mathcal{P}(A)$ olur. Ayrıca f örten olduğu için $f(a) = B$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Buna göre ya $a \in B$ ya da $a \notin B$ olmalıdır. Bu iki durumu ayrı ayrı ele alarak her birinin çelişkiye yol açtığını gösterelim.

1. Durum. Eğer $a \in B$ ise B kümesinin tanımından $a \notin f(a)$ olur. Ancak $f(a) = B$ olduğu için $a \notin B$ elde edilir. Bu bir çelişkidir.

1. Durum. Eğer $a \notin B$ ise B kümesinin tanımından $a \in f(a)$ olur. Ancak $f(a) = B$ olduğu için $a \in B$ elde edilir. Bu bir çelişkidir.

Örten olacak şekilde bir $f : A \to \mathcal{P}(A)$ fonksiyonunun var olması varsayımı bizi çelişkiye düşürmüştür. Buna göre böyle bir örten fonksiyon olamaz.

Sonuç olarak, birebir bir $A \to \mathcal{P}(A)$ fonksiyonu vardır ancak örten bir $A \to \mathcal{P}(A)$ fonksiyonu yoktur. Böylelikle Tanım 13.4'e göre $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ olması gerekir. □

Böylelikle $A = \mathbb{N}$ kümesi ile başlayıp Teorem 13.7'yi tekrar tekrar uygulayarak, herbir elemanı sonsuz kardinaliteye sahip olan aşağıdaki zincirini elde ederiz:

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| < \cdots \tag{13.2}$$

Sonuç olarak, $\aleph_0$ ile başlayan ve terimleri farklı sonsuzluk çeşitlerinden oluşan artan bir sonsuz dizi vardır. Dikkat edilirse $\mathbb{N}$ sayılabilirdir ancak $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ vb. kümelerinin hiçbiri sayılamazdır.

Bir sonraki bölümde $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$ olduğunu ispatlayacağız. Buna göre (13.2)'deki zincirin ilk iki elemanı $|\mathbb{N}|$ ve $|\mathbb{R}|$ ile verilir. Bunlara, vahşi ve egzotik sonsuzluklardan oluşan uzun bir listenin evcilleştirilmiş iki sonsuzluğu gözüyle bakılabilir.

İleri küme teorisi veya matematiğin temelleri konusunda çalışmayı planlamadığınız sürece, $\aleph_0$ ve $|\mathbb{R}|$ ötesinde herhangi bir sonsuzluk türüne rastlamanız pek olası değildir. Ancak gelecekteki matematik derslerinde, sayılabilir sonsuz ve sayılamaz kümeleri ayırt etmeniz gerekeceği için bu bölümü size bu konuda yardımcı olabilecek iki teorem ile bitirelim.

Teorem 13.8. *Sayılabilir sonsuz bir kümenin sonsuz her altkümesi sayılabilir sonsuzdur.*

İspat. A kümesi, sayılabilir sonsuz B kümesinin sonsuz bir altkümesi olsun. B sayılabilir sonsuz olduğu için elemanları $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ biçimindeki sonsuz bir liste olarak yazılabilir. Bu kümeden, A altkümesinin bütün elemanlarını sırayla seçerek yeni bir liste oluşturabiliriz. Buna göre A kümesi bir liste formunda yazılabilir. A sonsuz olduğu için onun için yazılan liste de sonsuz olmalıdır. Sonuç olarak A sayılabilir sonsuzdur. □

Teorem 13.9. *Eğer $U \subseteq A$ ve U sayılamaz ise A kümesi de sayılamazdır.*

İspat. İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelim ki $U \subseteq A$ ve U sayılmaz olsun ancak A sayılamaz olmasın. O zaman $U \subseteq A$ ve U sonsuz olduğu için A da sonsuz olmalıdır. A kümesi sonsuz olup da sayılamaz olmadığı için sayılabilir sonsuz olmalıdır. Böylece U kümesi sayılabilir sonsuz bir kümenin altkümesidir ve Teorem 13.8'den dolayı sayılabilir sonsuz olmak zorundadır. O halde U hem sayılabilir sonsuzdur hem de sayılamazdır. Bu bir çelişkidir. □

Teorem 13.8 ve Teorem 13.9, bir kümenin sayılabilir olup olmadığına karar vermemiz gerektiğinde kullanışlı olabilir. Bazen bir kümenin kardinalitesi, kardinalitesi bildiğimiz başka bir küme ile karşılaştırarak belirlememize olanak sağlar.

Örneğin, $A = \mathbb{R}^2$ kümesinin sayılamaz olup olmadığını belirlemek istediğimizi varsayalım. $U = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ile temsil edilen $x-$ekseni $\mathbb{R}$ ile aynı kardinaliteye sahip olduğu için sayılamazdır. Teorem 13.9, $\mathbb{R}^2$'nin sayılamayacağını söyler. Başka örnekler alıştırmalara bulunabilir.

Alıştırmalar

1. Kabul edelim ki A bir küme ve B sayılamaz bir küme olsun. Örten olacak şekilde bir $f : A \to B$ fonksiyonu var ise A kümesinin kardinalitesi hakkında ne söylenebilir.

2. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin sayılamaz olduğunu ispatlayınız.

3. İspatlayınız ya da çürütünüz: Eğer A sayılamaz ise $|A| = |\mathbb{R}|$ olmalıdır.

4. İspatlayınız ya da çürütünüz: Eğer $A \subseteq B \subseteq C$ ve A ile C sayılabilir sonsuz ise B de sayılabilir sonsuzdur.

5. İspatlayınız ya da çürütünüz: $\{0,1\} \times \mathbb{R}$ kümesi sayılamazdır.

6. İspatlayınız ya da çürütünüz: Her sonsuz küme, sayılabilir sonsuz bir kümenin altkümesidir.

7. İspatlayınız ya da çürütünüz: Eğer A sayılabilir sonsuz, B sayılamaz ve $A \subseteq B$ ise $B - A$ sayılamazdır.

8. İspatlayınız ya da çürütünüz: Tamsayıların $\{(a_1, a_2, a_3, \dots) : a_i \in \mathbb{Z}\}$ ile verilen sonsuz dizisi sayılabilir sonsuzdur.

9. Eğer A ve B sonlu iki küme ve $|A| = |B|$ ise birebir olan her $f : A \to B$ fonksiyonunun aynı zamanda örten olduğunu ispatlayınız. Eğer A ve B sonlu değil ise bunun doğru olmak zorunda olmadığını gösteriniz.

10. Eğer A ve B sonlu iki küme ve $|A| = |B|$ ise örten olan her $f : A \to B$ fonksiyonunun aynı zamanda birebir olduğunu ispatlayınız. Eğer A ve B sonlu değil ise bunun doğru olmak zorunda olmadığını gösteriniz.

13.4 Cantor-Bernstein-Schröeder Teoremi

Sayıların sıklıkla kullanınlan bir özelliği, $a \leqslant b$ ve $b \leqslant a$ ise $a = b$ olmasıdır. Aynı özelliğin kardinalite için de geçerli olup olmadığını sorabiliriz: Eğer $|A| \leqslant |B|$ ve $|B| \leqslant |A|$ ise $|A| = |B|$ olur mu? Bu gerçekten de doğrudur ve bu bölümün amacı bunu ispatlamaktır. Bu iş, iki kümenin aynı kardinaliteye sahip olduğunu ispatlamak için alternatif (ve de oldukça etkili) bir yöntem verecektir.

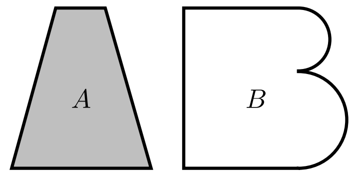
Hatırlanacağı üzere $|A| \leqslant |B|$ ifadesi $|A| < |B|$ veya $|A| = |B|$ anlamına gelir (Tanım 13.4). Eğer $|A| < |B|$ ise (Tanım 13.4'den) birebir bir $A \to B$ fonksiyonu vardır. Öte yandan eğer $|A| = |B|$ ise bir $A \to B$ eşlemesi vardır (ki bu aynı zamanda birebirdir). Böylece $|A| \leqslant |B|$ ifadesi, birebir olacak şekilde bir $f : A \to B$ fonksiyonunun var olmasını gerektirir.

Benzer şekilde $|B| \leqslant |A|$ ifadesi, örten olacak şekilde bir $g : B \to A$ var olduğuna işaret eder.

Amacımız, $|A| \leqslant |B|$ ve $|B| \leqslant |A|$ ise $|A| = |B|$ olduğunu göstermektir. Başka bir deyişle, birebir $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ fonksiyonları varken bir $h : A \to B$ eşlemesinin var olduğunu göstermektir. Bunun ispatı çok zor değildir ancak çok açık da değildir. Buradaki f ve g fonksiyonlarının böyle bir h fonksiyonunun varlığını garanti etmesi **Cantor-Bernstein-Schröeder** teoremi olarak adlandırılır. Bu teorem, herhangi iki A ve B kümesinin aynı kardinaliteli olduğunu kanıtlamak için oldukça kullanışlıdır çünkü bir $A \to B$ eşlemesi bulmak yerine, birebir $A \to B$ ve $B \to A$ bulmanın yeterli olacağını söyler. Birebir fonksiyonları bulmak ise eşlemeleri yani birebir ve örten fonksiyonları bulmaktan daha kolaydır.

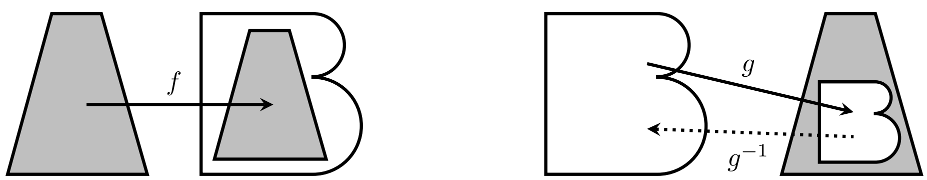
Cantor-Bernstein-Schröeder teoremini birazdan ispatlayacağız. Ancak bunu yapmadan önce, ispat için bize yol gösterecek görsel bir örnek üzerinde çalışalım.

Kabul edelim ki birebir $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ fonksiyonları var olsun. Bunları, bir $h : A \to B$ eşlemesi üretmek için kullanmak istiyoruz. Aşağıda, A ve B kümeleri taslak olarak gösterilmektedir. Bu kümeler, anlaşılırlık açısından, temsil ettikleri harf şekline çizilmiştir. Bu iki küme arasındaki ayrımı kolayca yapabilmek için A kümesi gri renge boyanmıştır.



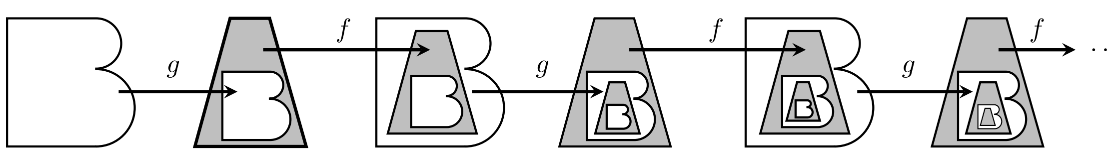
Şekil 13.3: A ve B kümeleri

Birebir $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ fonksiyonları Şekil 13.4'te gösterilmiştir. Aslında f fonksiyonunu, A kümesinin $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ ile temsil edilen bir "kopyasının" B içine yerleştirilmesi olarak düşünebiliriz. Eğer f örten değil ise f fonksiyonunun görüntüsü olan bu kopya B kümesinin tamamını kapsamaz. Benzer şekilde g fonksiyonu, B'nin $g(B)$ ile temsil edilen "kopyasını" A içine yerleştirir. Bu fonksiyonlar örten olmak zorunda değildir. Bu nedenle terslerinin varlığı garanti edilemez. Ancak B kümesinden $g(B) = \{g(x) : x \in B\}$ kümesine tanımlı $g : B \to g(B)$ fonksiyonu birebir ve örtendir, dolayısıyla $g^{-1} : g(B) \to B$ ters fonksiyonu vardır. (Bu ters fonksiyona birazdan ihtiyaç duyacağız.)



Şekil 13.4: Birebir $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ fonksiyonları

Birebir fonksiyonlardan oluşan Şekil 13.5'deki zincirini göz önüne alalım. En solda, g fonksiyonu B'nin bir kopyasını A içine yerleştirir. Daha sonra f fonksiyonu, (B'nin bir kopyasını barındıran) A kümesini B içine yerleştirir. Ondan sonra da g fonksiyonu, içinde B olan bir A kümesi barındıran B kümesini A içine yerleştirir. Bu fonksiyonlar, değişmeli olarak bu şekilde devam eder.



Şekil 13.5: Birebir fonksiyonlardan oluşan sonsuz zincir

Dizideki ilk A kümesi, $A - g(B)$ taralı bölgesini içerir. Dizinin ikinci A kümesindeki taralı bölge $(A - g(B)) \cup (g \circ f)(A - g(B))$ ile verilir. Üçüncü A kümesindeki taralı bölge aşağıda verilmiştir:

$$(A - g(B)) \cup (g \circ f)(A - g(B)) \cup (g \circ f \circ g \circ f)(A - g(B)).$$

Notasyonu basitleştirmek için $(g \circ f)^2 = (g \circ f) \circ (g \circ f)$ ve $(g \circ f)^3 = (g \circ f) \circ (g \circ f) \circ (g \circ f)$ vb. diyelim. Ayrıca $(g \circ f)^0 = i_A$ yani A üzerindeki özdeşlik fonksiyonu olsun. Buna göre dizinin $n-$yinci A kümesindeki taralı bölge aşağıda verilmiştir:

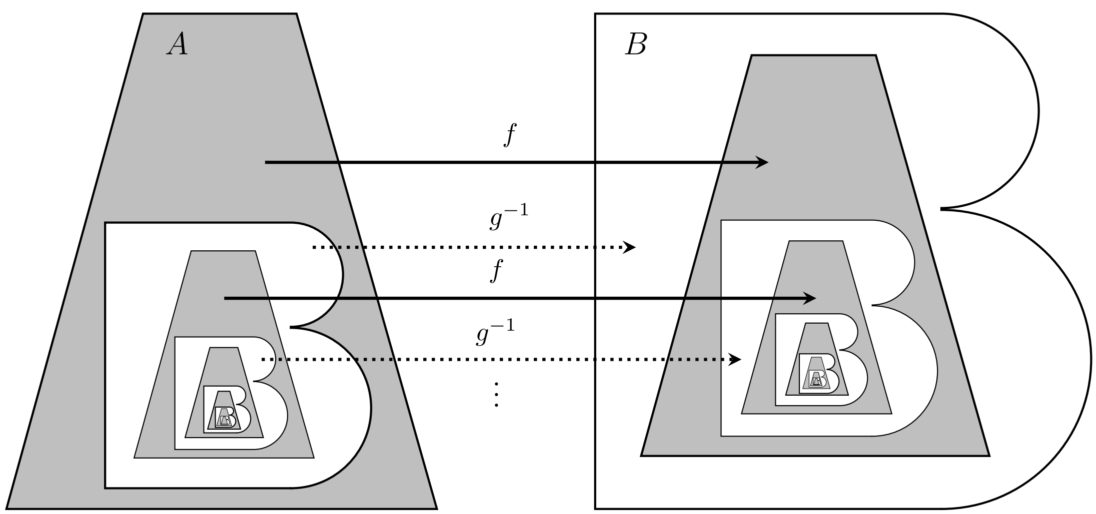
$$\bigcup_{k=0}^{n-1} (g \circ f)^k (A - g(B)).$$

Bu işlem A kümesini gri ve beyaz bölgelere ayırır. Gri bölge

$$G = \bigcup_{k=0}^{\infty} (g \circ f)^k (A - g(B))$$

kümesi, beyaz bölge ise $A - G$ kümesidir. (Bkz. Şekil 13.6)

Şekil 13.6, bulmaya çalıştığımız $h : A \to B$ eşlemesi için bir öneri sunar. Birebir f fonksiyonu, soldaki gri bölgeleri sağdaki gri bölgelerle eşler. Diğer yandan $g^{-1} : g(B) \to A$ fonksiyonu ise soldaki beyaz bölgeleri sağdaki beyaz bölgelerle eşler. Böylece $h : A \to B$ fonksiyonunu, x gri bir nokta ise $h(x) = f(x)$ ve x beyaz bir nokta ise $h(x) = g^{-1}(x)$ olarak tanımlayabiliriz.



Şekil 13.6: Birebir ve örten $h : A \to B$ fonksiyonu

Kabaca ele aldığımız bu argüman, verilen birebir $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ fonksiyonları için bir $h : A \to B$ eşlemesinin var olduğunu gösterir. Ancak bu bir ispat değildir. Şimdi bunu bir teorem olarak ifade ederek, yukarıdaki diyagram ve fikirler ışığında ispatı dikkatli bir şekilde yapalım.

Teorem 13.10 (**Cantor-Bernstein-Schröeder teoremi**). *Eğer* $|A| \leqslant |B|$ *ve* $|B| \leqslant |A|$ *ise* $|A| = |B|$ *olur. Başka bir deyişle, eğer* $f : A \to B$ *ve* $g : B \to A$ *birebir fonksiyonları var ise bir* $h : A \to B$ *eşlemesi vardır.*

İspat. (Doğrudan İspat) Kabul edelim ki birebir olacak şekilde $f : A \to B$ ve $g : B \to A$ fonksiyonları var olsun. B kümesinden g fonksiyonunun görüntü kümesine tanımlı $g : B \to g(B)$ fonksiyonu birebir ve örtendir. Bu nedenle $g^{-1} : g(B) \to B$ ters fonksiyonu vardır. (Dikkat edilirse $g : A \to B$ fonksiyonu örten olmadığı sürece $g^{-1} : B \to A$ ters fonksiyonu yoktur.) Şimdi

$$G = \bigcup_{k=0}^{\infty} (g \circ f)^k \, (A - g(B)) \subseteq A$$

altkümesini göz önüne alalım. $W = A - G$ olsun. Buna göre $A = G \cup W$ kümesi, G (gri) ve W (beyaz) kümelerine ayrılabilir. Bir $h : A \to B$ fonksiyonunu

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in G \\ g^{-1}(x) & x \in W \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Dikkat edilirse bu tanım anlamlıdır: Eğer $x \in W$ ise $x \notin G$ olur. Buna göre $x \notin A - g(B) \subseteq G$ olur ve $x \in g(B)$ elde edilir. Böylelikle $g^{-1}(x)$ tanımlıdır.

İspatı tamamlamak için h fonksiyonunun hem birebir hem de örten olduğunu göstermemiz gerekmektedir.

Birebirlik için $h(x) = h(y)$ olduğunu kabul ederek $x = y$ olduğunu gösterelim. Burada üç durum söz konusudur. İlk olarak, x ve y elemanlarının her ikisi de G kümesinde ise $h(x) = h(y)$ olması $f(x) = f(y)$ olması anlamına gelir ki f birebir olduğu için $x = y$ elde edilir. İkinci olarak, x ve y elemanlarının her ikisi de W kümesinde ise $h(x) = h(y)$ olması $g^{-1}(x) = g^{-1}(y)$ olması anlamına gelir. Bu eşitliğin her iki tarafına g uygulanarak $x = y$ bulunur. Üçüncü durumda ise x ve y elemanlarından biri G, diğeri ise W kümesindedir. Örneğin $x \in G$ ve $y \in W$ olsun. G kümesinin tanımından, $x = (g \circ f)^k(z)$ olacak şekilde $k \geqslant 0$ ve $z \in A - g(B)$ vardır. Buna göre $h(x) = h(y)$ ifadesi $f(x) = g^{-1}(y)$ yani $f((g \circ f)^k(z)) = g^{-1}(y)$ olması anlamına gelir. Bu eşitliğin her iki tarafına g uygulanarak $(g \circ f)^{k+1}(z) = y$ bulunur. Buradan $y \in G$ elde edilir. Ancak $y \in W$ olduğu için bu imkansızdır. Dolayısıyla bu üçüncü durum olası değildir. İlk iki durumda $h(x) = h(y)$ ifadesi $x = y$ olmasını gerektirdiği için h birebirdir.

Şimdi, h fonksiyonunun örten olduğunu görmek için herhangi bir $b \in B$ ele alalım. Buna göre $h(x) = b$ şartını sağlayan bir $x \in A$ bulmamız gerekir. Dikkat edilirse $g(b) \in A$ olduğu için ya $g(b) \in W$ ya da $g(b) \in G$ olur. İlk durumda $h(g(b)) = g^{-1}(g(b)) = b$ olacağı için $x = g(b) \in A$

elemanı $h(x) = b$ şartını sağlar. İkinci durumda ise $g(b) \in G$ olur. G kümesinin tanımı

$$g(b) = (g \circ f)^k(z)$$

olacak şekilde $k > 0$ ve $z \in A - g(b)$ var olduğunu gösterir. Buradan

$$g(b) = (g \circ f) \circ (g \circ f)^{k-1}(z)$$

bulunur. Bu ifade,

$$g(b) = g\Big(f\big((g \circ f)^{k-1}(z)\big)\Big)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Fakat g birebir olduğu için

$$b = f\big((g \circ f)^{k-1}(z)\big)$$

elde edilir. Şimdi, $x = (g \circ f)^{k-1}(z)$ olsun. G kümesinin tanımından $x \in G$ olur. Gözlemleneceği üzere $h(x) = f(x) = f\big((g \circ f)^{k-1}(z)\big) = b$ olur. Böylece her $b \in B$ için $h(x) = b$ olacak şekilde bir $x \in A$ var olduğunu görmüş olduk. O halde h örtendir.

Sonuç olarak, $h : A \to B$ fonksiyonu hem birebir hem de örten olduğu için bir eşlemedir. □

Cantor-Bernstein-Schröeder teoreminin nasıl kullanılabileceğini gösteren bazı örnekler aşağıda verilmiştir. Bu örnekler $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ eşitliğini de içermektedir.

Örnek 13.6. $\mathbb{R}$ üzerindeki $[0,1)$ ve $(0,1)$ aralıkları eşit kardinaliteye sahiptir.

Bu gözlem oldukça akla yatkındır çünkü bu iki aralık, sol uçtaki 0 noktası dışında aynıdır. Buna rağmen bir $[0,1) \to (0,1)$ eşlemesi oluşturmak sıkıntılıdır. (Ancak o kadar da zor değildir. Bunun için Bölüm 13.1'deki Alıştırma 11'in çözümüne bakınız.)

Daha basit bir ispat şu şekilde yapılabilir. Dikkat edilirse $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$ ile tanımlanmış olan $f : [0,1) \to (0,1)$ fonksiyonu birebirdir. Ayrıca, $g(x) = x$ olarak tanımlı $g : (0,1) \to [0,1)$ fonksiyonu da birebirdir. Böylelikle Cantor-Bernstein-Schröeder teoremi, bir $h : [0,1) \to (0,1)$ eşlemesinin var olduğunu garanti eder. Dolayısıyla $|[0,1)| = |(0,1)|$ olur.

Teorem 13.11. *$\mathbb{R}$ ve $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ kümeleri aynı kardinalitelidir.*

İspat. Örnek 13.4'te $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$, Örnek 13.6'da ise $|(0,1)| = |[0,1)|$ olduğu gösterilmiştir. Buna göre $|\mathbb{R}| = |[0,1)|$ olur. O halde teoremi ispatlamak için $|[0,1)| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ olduğunu göstermemiz gerekir. Cantor-Bernstein-Schröeder teoremine göre, birebir $f : [0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ve $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1)$ fonksiyonları bulmak yeterlidir.

Bilindiği üzere $[0,1)$ aralığındaki her sayının $0.b_1b_2b_3b_4\ldots$ formundaki ondalık gösterimi bir tektir. Bu gözlemi kullanarak $f : [0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Ondalık gösterimdeki

b_i rakamlarından her biri $0, 1, 2, \ldots, 9$ sayılarından biridir ve sonunda 9 rakamı tekrar eden ondalık bir gösterim yoktur. (Örneğin $0.35999\overline{9} = 0.360$ olduğunu hatırlayınız.) Şimdi, $f : [0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ fonksiyonunu

$$f(0.b_1b_2b_3b_4\ldots) = \{10b_1, 10^2b_2, 10^3b_3, \ldots\}$$

olarak tanımlayalım. Örneğin $f(0.1212\overline{12}) = \{10, 200, 1000, 20000, 100000, \ldots\}$ ve $f(0.05) = \{0, 500\}$ olur. Ayrıca $f(0.5) = f(0.5\overline{0}) = \{0, 50\}$ olduğu açıktır. Bu fonksiyonunun birebir olduğunu görmek için $[0,1)$ aralığında, birbirinden farklı olan $0.b_1b_2b_3b_4\ldots$ ve $0.d_1d_2d_3d_4\ldots$ sayılarını ele alalım. Bazı i indisleri için $b_i \neq d_i$ olduğundan $b_i10^i \in f(0.b_1b_2b_3b_4\ldots)$ fakat $b_i10^i \notin f(0.d_1d_2d_3d_4\ldots)$ olur. Böylece $f(0.b_1b_2b_3b_4\ldots) \neq f(0.d_1d_2d_3d_4\ldots)$ elde edilir. Sonuç olarak f birebirdir.

Şimdi, $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1)$ fonksiyonunu şu şekilde tanımlayalım: $i \in X$ ise $b_i = 1$ ve $i \notin X$ ise $b_i = 0$ olmak üzere $g(X) = 0.b_1b_2b_3b_4\ldots$ olsun. Buna göre, örneğin $g(\{1,3\}) = 0.10100\overline{0}$ ve $g(\{2,4,6,8,\ldots\}) = 0.010101\overline{01}$ olur. Ayrca $g(\emptyset) = 0$ ve $g(\mathbb{N}) = 0.111\overline{1}$ olduğu görülebilir. Bu fonksiyonunun birebir olduğunu görmek için $X \neq Y$ olduğunu kabul edelim. Buna göre X veya Y kümelerinden birine ait olup, diğerine ait olmayan en az bir i tamsayısı vardır. Sonuç olarak $g(X) \neq g(Y)$ olur çünkü bunların virgülden sonraki $i-$yinci rakamları farklıdır. Bu, g fonksiyonunun birebir olduğunu gösterir.

Cantor-Bernstein-Schröeder teoremi, birebir $f : [0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ve $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1)$ fonksiyonları var olduğu için, bir $h : [0,1) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ eşlemesinin varlığını garanti eder. O halde $|[0,1)| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ olur. Böylece, $|\mathbb{R}| = |[0,1)|$ olduğu için $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ sonucuna ulaşırız. □

Daha önceden $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$ olduğunu biliyorduk. Biraz önce de $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ olduğunu ispatladık. Bu gözlem, $\mathbb{R}$'nin kardinalitesinin $|\mathbb{N}| = \aleph_0$'dan "çok uzak" olmadığını gösterir. Bu bölümü $\aleph_0$ ve $|\mathbb{R}|$ arasındaki bu gizemli ilişki üzerine birkaç söz ederek kapatalım.

Bu ünitenin başlangıcında $\aleph_0 < |\mathbb{R}|$ olduğunu kanıtladık. Cantor'un sonsuz kümeler üzerindeki teorisini formüle etmesinden neredeyse bir asır sonra, matematikçiler

$$\aleph_0 < |A| < |\mathbb{R}|$$

olacak şekilde bir A kümesinin var olup olmadığı sorusuna yanıt vermeye çalıştılar. Yaygın olarak böyle bir kümenin var olmadığına inanılıyordu ancak hiç kimse bunu ne ispatlayabildi ne de çürütebildi. Böyle bir A kümesinin var olmadığı iddiası, **süreklilik hipotezi** olarak anılmaya başlandı.

Teorem 13.11, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ olduğunu belirtir. Bunu, Eşitlik (13.2)'de verilen zincirde kullanarak

$$\begin{array}{ccccccc} \aleph_0 & & |\mathbb{R}| & & & & \\ \parallel & & \parallel & & & & \\ |\mathbb{N}| & < & |\mathcal{P}(\mathbb{N})| & < & |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| & < & |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))| < \cdots \end{array}$$

yazabiliriz. Buradan süreklilik hipotezinin, $\mathbb{N}$ ve onun kuvvet kümesinin kardinaliteleri arasında başka hiçbir kümenin kardinalitesinin olmayacağını iddia ettiğini görürüz.

Bu iddia sezgisel olarak mantıklı görünse de Cantor'un onu ilk olarak 1880'lerde ortaya attığından beri ispatı yoktur. Aslında gerçek durum neredeyse paradoksaldır. Mantık bilimci Kurt Gödel, yeterince güçlü ve tutarlı olan herhangi bir aksiyomatik sistemde, ispatlanamayacak ya da çürütülemeyecek önermelerin var olduğunu 1931 yılında ispatladı.

Daha sonra süreklilik hipotezinin değilinin, kümeler teorisinin standart aksiyomları ile (Bölüm 1.10'da bahsedilen Zermelo-Fraenkel aksiyomları) ispatlanamayacağını kanıtladı. Bu, ya süreklilik hipotezinin yanlış olduğu ve bunun kanıtlanamayacağı ya da doğru olduğu anlamına gelmektedir.

Paul Cohen, 1964 yılında şaşırtıcı olan şu gerçeği keşfetti: Mantık yasaları ve kümeler teorisi aksiyomları göz önüne alındığında, hiç bir ispattan süreklilik hipotezi çıkarımı yapılamaz. Daha açık bir ifadeyle, süreklilik hipotezinin *ispatlanamayacağını* kanıtladı.

Gödel ve Cohen'in sonuçları bir araya getirildiğinde, matematiğin standart aksiyomlarının süreklilik hipotezinin doğru veya yanlış olup olmadığına "karar vermesinin" mümkün olmadığı görülür; süreklilik hipotezini doğru kabul etmekten ya da inkâr etmekten hiçbir mantıksal çatışma ortaya çıkamaz. Bunu doğru ya da yanlış olarak kabul etme konusunda özgürüz. Bu kararların her ikisi de kümeler teorisinin farklı –fakat aynı ölçüde tutarlı– versiyonlarıdır.

Bu durum, mantığın temellerini ve bu kitapta yaptığımız her şeyi bir anlamıyla baltalıyormuş gibi görünebilir. Süreklilik hipotezi bir *önermedir* –doğru ya da yanlış olmalıdır. Bunun her iksin birden nasıl olabilir?

Şimdi bunu anlamaya yardım edecek bir benzetme yapalım. Bunun için $\mathbb{Z}_n$ sayı sistemini ele alalım. Eğer $[2] = [0]$ ifadesinin doğru mu yoksa yanlış mı olduğu sorulsaydı ne olurdu? Elbette ki cevap n değerine bağlıdır. Örneğin, $[2] = [0]$ ifadesi $\mathbb{Z}_2$'de doğru fakat $\mathbb{Z}_3$'te yanlıştır. Üstelik, $[2] = [0]$ ifadesinin doğru olduğunu iddia edersek bunun mantıksal olarak $\mathbb{Z}_2$ sisteminde gerçekleştiği sonucuna varırız. Eğer $[2] = [0]$ ifadesinin yanlış olduğunu iddia edersek başka bir $\mathbb{Z}_n$ ile ilgileniyoruz demektir. O halde $[2] = [0]$ ifadesinin doğru ya da yanlış olması, $\mathbb{Z}_n$ sayı sisteminde bir tutarsızlık olmasını gerektirmez. Sonuç olarak, $[2] = [0]$ ifadesi $\mathbb{Z}_2$ "evreni" içinde doğru, (ve örneğin) $\mathbb{Z}_3$ evreni içinde yanlış bir önermedir.

Süreklilik hipotezi için de durum aynıdır. Bunun doğru olduğunu söylemek, bir kümeler teorisi sistemi verir. Yanlış olduğunu söylemek ise başka bir kümeler teorisi verir. Bu iki teori her ne kadar farklı olsa da Gödel ve Cohen'in bulguları, bunların eşit derecede tutarlı ve geçerli matematiksel evrenler olması anlamına gelir.

O halde hangisine inanmalısınız? Neyse ki bu çok fark etmez çünkü önemli matematiksel sonuçlar süreklilik hipotezine bağlı değildir. (Her iki evrende de geçerlidir.) Matematiğin temellerini derinlemesine incelemediğiniz sürece, süreklilik hipotezini doğru kabul etmekten bir zarar gelmez. Çoğu matematikçi bu konuda bilinmezlik ilkesini benimser ancak kümeler teorisinin süreklilik hipotezini doğru kabul eden versiyonunu tercih etme eğilimindedir.

Süreklilik hipotezi ile ilgili bu durum, matematiğin muazzam derinliğinin kanıtıdır. Bu bize, kitapta sunulan fikirlerle başlayan sistematik mantık yöntemlerinin titizlik ve dikkatinin önemini hatırlatır.

Alıştırmalar

1. Eğer $A \subseteq B$ ve birebir bir $g : B \to A$ fonksiyonu var ise $|A| = |B|$ olduğunu gösteriniz.
2. $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}|$ olduğunu gösteriniz. Öneri: $|(0,1) \times (0,1)| = |(0,1)|$ olduğunu göstererek işe başlayabilirsiniz.
3. $\mathbb{N}$'den $\{0,1\}$ kümesine tanımlı bütün fonksiyonların kümesi $\mathcal{F}$ olsun. $|\mathbb{R}| = |\mathcal{F}|$ olduğunu gösteriniz.
4. $\mathbb{R}$'den $\{0,1\}$ kümesine tanımlı bütün fonksiyonların kümesi $\mathcal{F}$ olsun. $|\mathbb{R}| < |\mathcal{F}|$ olduğunu gösteriniz.
5. $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ kümesini ele alalım. $|B| = |\mathbb{R}^2|$ olduğunu gösteriniz.
6. $|\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ olduğunu gösteriniz.
7. İspatlayınız ya da çürütünüz: Eğer birebir $f : A \to B$ ve örten $g : A \to B$ fonksiyonları var ise bir $h : A \to B$ eşlemesi vardır.

Sonuç

Eğer bu kitapta verilen fikirleri özümseyerek öğrendiyseniz, artık matematiğin yorumlanması ve aktarılması için etkileyici bir takım araçlara sahipsiniz demektir. Bu araçlar, her seviyede vazgeçilmezdir. Ancak bazı şeyleri inşa etmek, elbette ki araçlardan daha fazlasını gerektirir. Planlama, yaratıcılık, ilham, beceri, yetenek, sezgi, tutku ve ısrar son derece önemlidir. Eğer buraya kadar geldiyseniz, bu özelliklere muhtemelen yeterli ölçüde sahip olduğunuz rahatlıkla söylenebilir.

Matematiği anlama arayışının sonu yoktur ancak siz, bu yolculuk için iyi bir donanıma sahipsiniz. Bu kitaptan öğrendikleriniz, umarım ki sizi daha yüksek bir anlayış, yaratıcılık ve ifade düzlemine taşır.

En iyi dileklerimle, bol şanslar...

R.H.

Dizin