

图的鹅卵石游戏： 图论、数论和最优化的融合

Glenn Hurlbert Franklin Kenter

1. 引言

有很多图论的研究主题可以统一到“在图上移动物体”的框架之下。例如，在网络优化中，人们将包裹从某些供应顶点转移到其他有需求的顶点上，其中每条边都赋予每个包裹运输费用，尝试找到方案使得总费用最低。在网络流中，根据每条边的容量限制以及路径上顶点的流量守恒要求，尝试寻求从源点到汇点的最大流量。在各类追捕和逃逸问题中，警察和盗贼在边上依次移动，警察追击到盗贼即完成抓捕，人们研究在保证完成任务的前提下需要警察的最少数量。其他的例子如零强迫 (zero forcing), 黑色鹅卵石游戏 (black pebbling), 芯片烧制 (chip firing), 黑白鹅卵石游戏 (black and white pebbling), 图挂钩 (graph pegging) 和刚性鹅卵石 (rigid pebbling), 有着不同的移动规则、不同的目标和不同的约束和 / 或成本。虽然其中一些主题模拟真实世界中的问题，但是其他主题模拟了纯数学问题，如计算复杂度中的时空权衡、Cholesky (楚列斯基) 分解中的高效矩阵存储、计算几何中的刚性结构以及矩阵秩和零化度计算。我们在这里讨论的图的鹅卵石游戏模型将一个数论问题转化到图论中。而它自身也发展成为一门内容丰富的学科。

在本文中，我们将介绍该领域中的一系列典型方向，对每个方向，分享一些主要结果、猜想和公开问题。对这里的很多问题各类水平的人群都是可以参与其中的，从本科生 (如 [7–9, 19]) 到经验丰富的退休人员，从代数和图论到概率和离散优化等各类知识背景，事实上，很多著名的专家 (如 Bukh, Elledge, Gibbons, Herscovici, Moews, Pachter, Pudwell, Tomova, Wierman, Xue, Yerger, 等等) 在他们作为本科生的时候就得到了图的鹅卵石游戏的一些极好的结果。对此感兴趣的读者，可以从文献 [12,13] 中找到未在本文中引用的大多数结果。

2. 数论中的缘起

2.1 零和子序列

图的鹅卵石游戏的故事始于 Erdős (爱尔迪希) 与零和问题。零和问题是有限 Abel (阿贝尔) 群中的组合问题，确定元素集合 (或序列) 的大小，使得具有规定约束的某个子集 (或子序列) 的和为零。

译自: Notices of the AMS, Vol. 68 (2021), No. 11, p. 1900–1913, Graph Pebbling: A Blend of Graph Theory, Number Theory, and Optimization, Glenn Hurlbert and Franklin Kenter, figure number 10. Copyright ©American Mathematical Society 2021. All rights reserved. Reprinted with permission. 美国数学会与作者授予译文出版许可。

Glenn Hurlbert 是弗吉尼亚联邦大学数学与应用数学系的教授兼系主任，他的邮箱地址是 ghurlbert@vcu.edu.

Franklin Kenter 是美国海军学院的数学助理教授，他的邮箱地址是 kenter@usna.edu.

定理 1 (Erdős-Ginzburg-Ziv, 1961) 令 n 是正整数, 则 \mathbb{Z}_n 中任何长度为 $2n - 1$ 的元素序列都存在一个长度正好为 n 的子序列, 且子序列的和为 $0 \pmod n$.

这个结果是最好的可能, 我们可以考虑由 $n - 1$ 个“0”和 $n - 1$ 个“1”所构成的序列, 其不存在长度为 n 的非空子序列使得和为 $0 \pmod n$.

更一般地, 在某些 (非空) 子序列的和具有特定性质之前, 关于序列的长度可以提出各种各样的问题. 例如, 如果 S 是一个群 Γ 中长度为 $|\Gamma|$ 的元素序列, 那么鸽巢原理蕴含着存在一个非空的零和子序列. 能保证零和子序列存在的最小序列长度称为 Γ 的 *Davenport* 常数 (达文波特 *constant*). 对于 \mathbb{Z}_n , n 是最好的可能 (考虑 $n - 1$ 个“1”构成的序列), 因此 \mathbb{Z}_n 的 *Davenport* 常数是 n .

Erdős 和 Lemke 猜想 $S = (s_1, \dots, s_n)$ 存在一个非空的零和子序列 T , 满足条件 $\sum_{t \in T} t \leq \text{lcm}(s_1, \dots, s_n, n)$. 一个更强的条件是 $\sum_{t \in T} \gcd(t, n) \leq n$, 可以写成 $\sum_{t \in T} \frac{1}{|t|} \leq 1$, 其中 $|g|$ 表示群 Γ (在本例中是 \mathbb{Z}_n) 中元素 g 的阶数. 这个和通常被称为子序列 T 的交叉数 (*cross number*), 它在因子分解理论中发挥着至关重要的作用. Kleitman 和 Lemke 对这个更强问题给出了肯定的回答.

定理 2 (Lemke-Kleitman, 1989) 设 n 是一个正整数. 令 S 是 \mathbb{Z}_n 中长度为 n 的序列. 那么 S 中存在一个子序列 $T = (t_1, t_2, \dots, t_q)$, 使得

$$\sum_{t \in T} t \equiv 0 \pmod n \text{ 且 } \sum_{t \in T} \frac{1}{|t|} \leq 1.$$

他们的工作很自然地拓展到任意群的情形, 它对非 Abel 群 Γ 仍然是未知的.

猜想 3 (Lemke-Kleitman, 1989) 设 Γ 是一个有限加法群. 设 S 是 Γ 中长度为 $|\Gamma|$ 的序列. 那么 S 中存在一个子序列 $T = (t_1, t_2, \dots, t_q)$, 使得

$$\sum_{t \in T} t = 0_\Gamma \text{ 且 } \sum_{t \in T} \frac{1}{|t|} \leq 1.$$

2.2 Chung 对 Lemke-Kleitman 定理的证明

Lemke-Kleitman 定理的最初的证明基于元素间多种可能的相互作用来进行归纳论证. Lagarias 和 Saks (萨克斯) 提出了 Erdős-Lemke 问题的简化证明思路. Chung (金芳蓉) 则首次将这一方法引入到文献 [6]. 主要的想法是将元素与类似素因子分解联系起来. 设 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_q^{a_q}$ 是 n 的素因子分解. 对序列 S 中每个元素 s_i , 记 $s_i = p_1^{a_{i,1}} p_2^{a_{i,2}} \cdots p_q^{a_{i,q}} R_i$, 其中 R_i 与 n 互素.

选择任意指数 (b_1, \dots, b_q) , 并设 T 是 S 的一个子序列且 T 包含形式为 $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_q^{b_q} R$ (其中 R 不必与 n 互素) 的元素. 如果对于某些 j , $|T| \geq p_j$, 那么存在 T 的一个长度至多为 p_j 的子序列 T' , 使得 T' 中元素的和必然具有形式 $p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_j^{b_{j+1}} \cdots p_q^{b_q} R$. 进一步地, 如果 $t \in T$ 满足

$$1/|t| \leq p_1^{b_1 - a_1} p_2^{b_2 - a_2} \cdots p_j^{b_j - a_j} \cdots p_q^{b_q - a_q},$$

那么

$$\sum_{t \in T'} 1/|t| \leq p_1^{b_1 - a_1} p_2^{b_2 - a_2} \cdots p_j^{b_{j+1} - a_j} \cdots p_q^{b_q - a_q}.$$

此后, 我们将 T' 看做单一实体, 其中 T' 的值为 $\sum_{t \in T'} t$, 符号 $1/|T'|$ 用来表示 $\sum_{t \in T'} 1/|t|$. 注意到这些定义都是递归使用的, 因为元素 $t \in T'$ 本身可能就是一个集合, 而不仅仅是一个数. 通过迭代和有策略地应用这些分组, 可以在 S 中找到符合交叉数条件的零和子序列. 这也就是金芙蓉对 Lemke-Kleitman 定理的证明思路. 从这个意义上讲, 她的证明可以视作一个抽象的益智游戏. 这个游戏就是图的鹅卵石游戏!

将 Erdős-Lemke 问题转化为图的鹅卵石游戏并非易事. 证明的本质是 (1) 构建除数格 $L(n)$, (2) 将给定的数字看作鹅卵石的数量, 根据与 n 的公因子关系将其合理放置 $L(n)$ 中, (3) 注意到每个鹅卵石都符合两个条件的局部要求, (4) 通过“鹅卵石移动步骤”(稍后定义) 来模拟格上鹅卵石的某种移动, (5) 证明这些步骤保持上述两个局部条件, (6) 注意到任何到达底部的鹅卵石表示 Erdős-Lemke 问题的一个解, 最后 (7) 证明在任何 n 个卵石的布局下, 始终可以通过鹅卵石移动步骤来将鹅卵石移动到最小顶点. Elledge 和 Hurlbert 给出了更详细的转化过程, 类似于金芙蓉对图的鹅卵石游戏的讨论, 他们证明了 Lemke-Kleitman 猜想对 Abel 群成立 (最初由 Geroldinger 解决).

我们现在用图 1 中所示的具体例子来说明这种方法的鹅卵石移动, 考虑放置在 $(2, 1, 0)$ 处的 5 个鹅卵石构成的一个序列, 例如 $T = (550, 1925, 1100, 3300, 1100)$. 因为它们都是 $5^2 \cdot 11^1 \cdot 31^0 = 275$ 的倍数, 为简化将其表示为倍数, 继续通过模 5 运算简化, 变成序列 $(2, 2, 4, 2, 4)$. 现在很容易在 \mathbb{Z}_5 中发现零和, 例如最后的 3 个数字 $(4, 2, 4)$. 然后作为一个鹅卵石移动步骤, 我们可以将对应的子序列 $T' = (1100, 3300, 1100)$ 沿着红边移动到 $(3, 1, 0)$, 作为单个“超级鹅卵石”, 记作序列 T' . 注意到 $\sum_{t \in T'} t = 5500 = 5^3 \cdot 11^1 \cdot 31^0 \cdot 2^2$, 并且 $\sum_{t \in T'} 1/|t| = 3(5^{-1} \cdot 11^0 \cdot 31^{-2}) \leq 5(5^{-1} \cdot 11^0 \cdot 31^{-2}) = 5^0 \cdot 11^0 \cdot 31^{-2}$. 这就是鹅卵石游戏模型相加的本质. 任意到达底部的超级鹅卵石都会是交叉数最多为 1 的零和子序列.

上述最后阶段 (7) 简化为无正方形情况. 也就是说, 如果 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_q^{a_q}$, 我们将关于 $L(n)$ 的证明简化为关于 $L(m)$ 的, 其中 m 是 d 个不同素数的任何乘积, 而 $d = \sum a_i$, 通常被称作 Q^d , 是 $\{1, \dots, d\}$ 的格子集. 可以看出, $L(n)$ 是 q 个长度分别为 a_1, \dots, a_q 的路的乘积, 而 Q^d 是 d 个长度为 1 的路的乘积. 因为 $L(n)$ 是 Q^d 的子格 (图 2)——事实上, 它是一个收缩核 (retract): Q^d 的同态像—— Q^d 中鹅卵石移动步骤的同态像是 $L(n)$ 中的鹅卵石移动步骤. 之后, 金芙蓉应用 Q^d 的更强的递归性质轻松地解决了问题. 我们将在

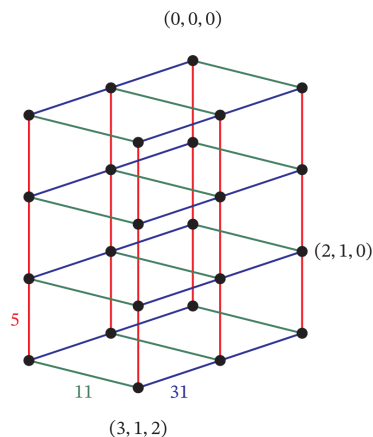


图 1 $n = 1,321,375 = 5^3 \cdot 11^1 \cdot 31^2$ 的倒置除数格, 将数字 $p = 2,984,850 = 5^2 \cdot 11^1 \cdot 31^0 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot 67$ 作为鹅卵石放置在 $(2, 1, 0)$

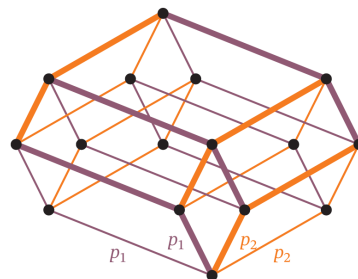


图 2 将除数格 $L(p_1^2 \cdot p_2^2)$ 嵌入 Q^4 作为收缩核. 粗边表示 $L(n)$. 然后细边以保邻接方式映射到 (相同颜色的) 粗边

§3.4 节中介绍她的技巧.

3. Lagarias-Saks 鹅卵石游戏

我们假设读者基本熟悉图是顶点和边 (无序的顶点对) 的集合, 并使用符号 $n(G)$ 表示图 G 的顶点数. 这里讨论的图都是连通的. 关于 n 个顶点图的通用符号包含: 完全图 K_n 表示图的每对顶点都相邻, 路 P_n 表示连续顶点是相邻的, 圈 C_n 表示路 P_n 的两个端点也是相邻的. 对于两个顶点 u 和 v , 距离 (*distance*) 函数 $\text{dist}(u, v)$ 度量从 u 到 v 的最短路上的边数. 图 G 中顶点 v 的离心率 (*eccentricity*) 定义为 $\text{ecc}_G(v) = \max_u \text{dist}(u, v)$. 图 G 的直径 (*diameter*) 定义为 $\text{diam}(G) = \max_v \text{ecc}_G(v)$. 有时在上下文清晰的时候, 我们会去掉下标 G . 我们用 $\lg(\cdot)$ 表示底数为 2 的对数函数. 此外, 对某个常数 C 和所有足够大的 x , 如果 $|f(x)| < Cg(x)$ (或者 $> C$), 则记作 $f \in O(g)$ (或者 $\Omega(g)$), 而 $\Theta(g) = \Omega(g) \cap O(g)$. 我们用 $f \ll g$ 来表示当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)/g(x) \rightarrow 0$.

3.1 鹅卵石游戏的基本内容

连通图 G 顶点上的鹅卵石构形 (*configuration*) C 是一个函数 $C: V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ (非负整数), 使得 $C(v)$ 表示放置在顶点 v 上的鹅卵石数量. 我们用 $|C|$ 表示 C 的大小 (*size*) $\sum_v C(v)$, 也就是构形中的所有鹅卵石数量. 从顶点 u 到它一个邻点 v 的鹅卵石移动步骤 (*pebbling step*) (记作 $u \mapsto v$) 将 $C(u)$ 的值减 2, 并将 $C(v)$ 的值增加 1. 给定一个指定目标 (*target*) 顶点 r , 如果通过一系列的鹅卵石移动步骤可以将 t 个鹅卵石放置到顶点 r 上, 我们就称 C 是 t -折叠 r -可解的 (*t-fold r-solvable*). 否则如果这样的步骤不存在, 那么 C 是 r -不可解的 (*r-unsolvable*). 我们关注的问题是确定 $\pi_t(G, r)$, 即最小的正整数 m 使得在图 G 顶点上的每个大小为 m 的构形都是 t -折叠 r -可解的. 这个定义是好的, 因为对足够大的 t , 鸽巢原理保证某个顶点包含至少 $2^{\text{ecc}_G(r)}$ 的鹅卵石构形, 从而可以达到求解要求. G 的 t -折叠鹅卵石数 (*t-fold pebbling number*) 定义为 $\pi_t(G) = \max_{r \in V(G)} \pi_t(G, r)$. 当 $t = 1$ 时, 简记作 $\pi(G)$, 这就是 G 的鹅卵石数 (*pebbling number*).

除了目标顶点以外, 在每个顶点上都放置一个鹅卵石的构形表明 $\pi(G) \geq n(G)$, 其中 $n(G)$ 表示图 G 的顶点数. 而在距离 r 最远的顶点上放置 $2^{\text{ecc}_G(r)} - 1$ 个鹅卵石, 其他顶点不放置鹅卵石的构形表明当顶点 r 满足 $\text{ecc}_G(r) = \text{diam}(G)$ 时, $\pi(G) \geq 2^{\text{diam}(G)}$.

我们还可以将 Q^d 看做二进制下所有 d -元组构成的图, 当两个数组恰好在一个坐标上不同时, 我们给这对数组连边. 在这种形式下, Q^d 通常被称为 d -维超立方体 (*d-dimensional hypercube*). 作为 Lemke-Kleitman 定理证明工作的一部分, 金芙蓉证明了以下结论.

定理 4 (Chung [6]) $\pi(Q^d) = 2d$.

特别地, 前面的两个界同时是紧的, 因为 $n(Q^d) = 2^d = 2^{\text{diam}(Q^d)}$.

为了给出 Erdős-Lemke 问题的另一种解决方法, 金芙蓉做了更多的工作. 给定一个正整数 n , 设它的分解为 $p_1^{a_1} \cdots p_q^{a_q}$, 并定义 $d = \sum_{i=1}^q a_i$. 修改鹅卵石移动步骤的规则, 在 Q^d 的那些 a_i 维度中, 每个顶点需要移除 p_i 个鹅卵石 (而不是 2 个) 才能在这些维度中移动一个鹅卵石. 金芙蓉证明了在这种扩展鹅卵石移动步骤的情况下 Q^d 的鹅卵石数是

n , 从而保证 Lemke-Kleitman 定理成立.

3.2 0 类图: $\pi(G) = n(G)$?

回到减 2 加 1 的鹅卵石游戏规则, 图 G , 如 Q^d , 如果满足 $\pi(G) = n(G)$, 称作 0 类 (class 0) 图. 这个术语来自于 Pachter, Snevily 和 Voxman 的一个优美的定理, 该定理说明如果 $\text{diam}(G) = 2$, 那么 $\pi(G) \leq n + 1$; 因此对于直径为 2 的图可以分成两类——0 类图和 1 类图. 如果对某个顶点 v , $G - v$ 不连通, 那么 $\pi(G) > n$. 事实上, 设 G_1 和 G_2 表示 $G - v$ 的两个连通分支且 $u_i \in G_i$. 定义构形 C 为 $C(u_1) = C(v) = 0$, $C(u_2) = 3$, 对其他顶点 w 为 $C(w) = 1$. 那么 C 是大小为 n 且 u_1 -不可解的构形. 图的连通度 (connectivity) 是使得一个图变成不连通的最少顶点数. 所以, 0 类图是 2-连通的.

0 类图还具有其他性质. 例如, 用 $N_a[v]$ 表示距离顶点 v 的长度至多为 a 的顶点集合. Cranston 等人 [7] 得到如下结论, 如果 G 是 0 类图, 并且对于某些数 a 与 b , u 和 v 是满足 $N_a[u] \cap N_b[v] = \emptyset$ 条件的顶点, 那么 $|N_a[u] \cup N_b[v]| \geq 2^{a+b+1}$, 否则存在大小至少为 n 的构形, 即在 v 处放置 $2^{a+b+1} - 1$ 个鹅卵石, 在 $N_a[u] \cup N_b[v]$ 上不放置, 在剩下顶点上放置 1 个鹅卵石, 则这种构形是 u -可解的. 它们利用这个邻域引理 (Neighborhood Lemma) 证明每个顶点数 $n \geq 4$ 的 0 类图至少有 $(5n - 11)/3$ 个边. 目前, 已知的具有最少边的 0 类图是轮 (wheel) 图, 即有 $2n - 2$ 条边, 且具有一个中心顶点的圈, 该顶点与圈上每个顶点都相邻. 是否存在边数更少的 0 类图呢?

随后, Clarke, Hochberg 和 Hurlbert 刻画了直径为 2 的 2-连通 1-类图的特点, 其主要性质是诱导包含图 3 中所示的 (1-类图) 金字塔 (pyramid) 图. 另一个重要性质是不在金字塔中的顶点都几何地存在于一个三角形中, 不同三角形内部的顶点都不相邻. 从概率意义上讲, 几乎所有图的直径都是 2——想想某两个顶点没有公共邻点的概率. 现在考虑它不太可能融入这种限制性的金字塔结构中: 所有图 $n - 6$ 个非金字塔中的顶点都至少有 3 个非邻点. 因此, 几乎所有的图都是 0 类图.

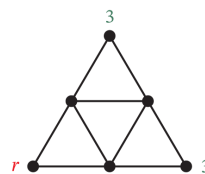


图 3 金字塔图, r -不可解构形

我们可以讲的更多. 如 Postle 等人 [20] 所示, 直径为 3 的图可以具有高至 $3n/2 + 2$ 的鹅卵石数, 但不会超过, 而直径为 4 的图鹅卵石数至多为 $(3/2)n + \Theta(1)$. 用来得到这些结论的技术包含“放电 (discharging)”, 这是在著名的四色定理的证明中使用的主要技术. 更大的直径会使得鹅卵石数达到指数级 (例如 $\pi(P_n) = 2^{n-1}$). 一般来说, Postle 证明了直径为 d 的图, 其鹅卵石数至多为

$$\frac{2^{\lceil \frac{d}{2} \rceil} - 1}{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} n + O(\sqrt{n \lg n}).$$

另一方面, 高连通性 (确保多条路到达目标顶点) 可以保持较低的鹅卵石数. Czygrinow 等人 [10] 证明了对所有 d , 存在一个 $k(d)$, 使得直径为 d 连通度至少为 $k(d)$ 的图是 0 类图. Erdős-Rényi (雷尼) 随机图模型以概率 p 独立地在顶点对之间连接边 (上面的技术针对 $p = 1/2$ 的情形). 作者证明 $k(d) \leq 2^{2d+3}$ (Clarke (克拉克) 等人证明至少为 $2^d/d$), 并使用这个结果证明了边概率为 $p \gg (n \lg n)^{1/d}/n$ 的随机图几乎肯定是 0 类图. 证明用到了

关于连通度至少为 k 、直径至多为 d 的图阈值的已有的定理. 这一数值与 $\lg n/n$ 的连通阈值之间的接近程度是一个有趣的问题. 不过对于 $k(d)$ 的上下界还有很大的改进空间.

直径-连通度定理的一个很好的应用场景是在 Kneser (克内泽尔) 图, 以其在图论和组合中的许多子领域的重要性而闻名, 包括图染色、图嵌入以及极值集合论等. 对于 $m \geq 2h + 1$, Kneser 图 $K(m, h)$ 对于顶点具有 $[m] = \{1, \dots, m\}$ 的所有 h -子集, 边连接不相交子集对. $K(m, 1)$ 是完全图 K_m , 图 4 中著名的 Petersen (彼得森) 图是 $h \geq 2$ 的最小示例. 读者应该发现, 证明 Petersen 图为 0 类图会是一个有趣的难题. (在文献中至少有 5 种不同的证明, 其中一种遵循上述直径为 2 的分类方法; 另外两个在后面介绍.) 事实上, 文献 [12] 中证明对于所有 $m \geq 5$, $K(m, 2)$ 是 0 类图. 此外, 利用手上的直径-连通度结论, 他们证明, 对于任意常数 $c > 0$, 存在整数 h_0 , 使得对任意 $h > h_0$ 和 $s \geq c(h/\lg h)^{1/2}$, $K(2h + s, h)$ 是 0 类图. 据此, 人们不禁相信对于所有的 $m \geq 2h + 1$, $K(m, h)$ 是 0 类图, 能够证明它的好想法还在路上. 这个主题还可以讨论更多的 0 类图的充分条件.

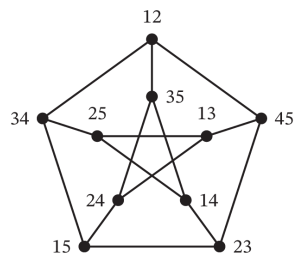
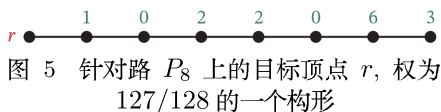


图 4 Petersen 图 $P = K(5, 2)$

3.3 权函数：一个最优化方法

沿着这些路线思考, 有机会使用权函数. 可以将目标顶点放置的鹅卵石赋上值为 1 的权, 在



目标顶点的邻域上的鹅卵石赋上值为 $1/2$ 的权, ..., 距离目标长度为 d 的顶点上的鹅卵石赋值为 $1/2^d$. 一个构形的权 (weight) 就是它权之和 (图 5). 例如, 不难证明一条路上的构形可以在其一个端点求解目标, 当且仅当它的权至少为 1. 通过缩放使所有权完备, 我们可以将该特征描述为: 一条路的构形不能在其中一个端点上求解目标, 当且仅当它的权小于 2^{n-1} , 也就是至多为 $2^{n-1} - 1$. 有趣的是, 这个界等于权之和.

以等价代价这还可以进行推广, 这一概念将我们引向涉及线性和整数最优化的技术. 假设 T 是一个树, 其中一片叶子 r 为目标, 且 $\text{ecc}_T(r) = d$. 定义权函数 (weight function) w_T 为 $w_T(v) = 2^{d-i}$, 其中 $i = \text{dist}_T(v, r)$. 对 (T, w_T) 称作基本策略 (basic strategy). 权函数引理 [14] 说明如果 C 是树 T 上的一个 r -不可解的构形, 那么

$$\sum_{v \in T} w_T(v)C(v) \leq \sum_{v \in T} w_T(v). \quad (1)$$

可以将其推广到所有图, 如下所示. 给定图 G 中的目标 r , 考虑 G 中任意以 r 作为叶子的树 T . 当 $v \notin T$ 时, 设 $w_T(v) = 0$, 将 w_T 拓展到 G 中所有顶点; 此时权函数引理依然成立. 从基本策略中得到的所有不等式一起推导出一个整数最优化问题, 通过这些约束下极大化 $z_r = \sum_{v \in G} C(v)$ (C 的大小). 如果 z_r^* 是最优值, 那么说明每一个 r -不可解的构形大小至多为 z_r^* : 也就是说, $\pi(G, r) \leq z_r^* + 1$. 这里产生了图的鹅卵石游戏上界的如下整数规划表述:

$$\begin{aligned} & \text{极大化} && 1 + \sum_v C(v) \\ & \text{使得} && \sum_{v \in T} w_T(v)C(v) \leq \sum_{v \in T} w_T(v) \quad \text{对任何基本策略 } (T, w_T). \end{aligned}$$

正如你可能想象的那样, 这种方法有一些缺点. 当然, 整数优化问题对输入大小通常是指数的, 但是输入大小 (这类树的数量) 对图的顶点数也是指数的 (或更糟!). 此外, 考虑目标为 r 的 n 个顶点图 G 的不可解性多面体 (*unsolvability polytope*): 图 G 的所有 r -不可解构形 (将这些构形看作 \mathbb{R}^n 里面的非负向量) 的凸包. 权函数引理蕴含着线性优化问题的可行多面体中包含不可解多面体, 但是它是一种非常松弛的包含. 为了加强这种包含, Cranston 等人 [7] 基于某些称为棒糖的非树子图 (一条路与一个圈连接在路的端点) 给出了额外的约束. 例如, 树方法仅仅得到 $\pi(Q^3) \leq 9$, 而添加了棒糖约束后可以得到 $\pi(Q^3) = 8$.

然而, 在实践中, 例如通过限制输入到深度不超过 $\text{ecc}_G(r) + 1$ 的若干个多项式广度优先子树构成的随机集合上, 然后仅使用线性最优化和不等式 $\pi(G, r) \leq \lfloor z_r^* \rfloor + 1$ 就可以停下, 取得令人惊喜的成功. 这个结果会非常近似, 甚至是精确的, 尤其是当图的直径不大的时候. 我们可以在图 6 的 Petersen 图 P 上进行说明. 用蓝色显示的树 T_{35} (用图 4 中的标号) 对应到不等式

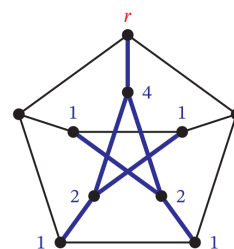


图 6 Petersen 图 P 的一个树约束

$$4C(v_{35}) + 2C(v_{14}) + 2C(v_{24}) + C(v_{23}) + C(v_{25}) + C(v_{13}) + C(v_{15}) \leq 12.$$

利用对称性得到另外两个树 T_{34} 和 T_{45} . 他们产生类似的约束, 所有 3 个约束的和表明

$$\begin{aligned} 4C(v_{34}) + 4C(v_{35}) + 4C(v_{45}) + 4C(v_{14}) + 4C(v_{24}) \\ + 4C(v_{23}) + 4C(v_{25}) + 4C(v_{13}) + 4C(v_{15}) \leq 36, \end{aligned} \quad (2)$$

所以 $|C| \leq 9$, $\pi(P, v_{12}) \leq 10$. 结合具有 10 个顶点的下界, 这表明 (由所有顶点看起来相同的对称性) Petersen 图是 0 类图. 这个例子还说明了下面的引理.

引理 5 (一致覆盖引理 [14]) 令 r 是图 G 的目标顶点, 并令 \mathcal{T} 是 r 策略构成的集合. 如果存在 m 使得对所有 G 中的点 $v \neq r$, 有 $\sum_{T \in \mathcal{T}} T(v) = m$, 那么 G 在 r 处是 0 类图.

引理是成立的, 因为不等式 (1) 的右侧是系数之和, 所以这同样适用于此类权函数的任意和. 因此, 在一致和中, 例如不等式 (2), 右侧部分在除以 m 后等于非目标顶点数 $n - 1$. 具有一致系数的左侧部分在除法后变成 C 的大小.

在很多情况下, 权函数方法提供了图鹅卵石数 (或其最优上界) 的最简单证明. 在这种证明中应用的策略集合称为证书 (*certificate*). 当我们从目标顶点出发, 穿过树的边时, 通过减少一半以上的权来改变权系统, 从而产生非基本 (*nonbasic*) 策略. 事实表明, 这些非基本策略是基本策略的二次线性 (即非负线性) 组合, 所以同样满足权函数引理. 因此非基本策略不需要包含在最优化约束中, 但是他们可以在证书中使用. 从不可解多面体的几何角度来看, 证书最多包含 $n - 1$ 个策略. 然而, 在实践中, 大多数的证书大小为 $\text{deg}_G(r)$, 因为使用 r 的相同邻居顶点的两个策略通常可以组合. 因此, 手工对特定图寻找它的证书甚至比计算机还要快, 特别是存在对称性的时候, 并且在无限图族中寻找证书实际上是纯手工的事情.

圈的幂 [14] 是一个比较好的例子. 对于图 G , 通过对满足 $\text{dist}_G(u, v) \leq k$ 的每对顶点

添加边 uv 定义 G 的 k 次幂, 记作 $G^{(k)}$. 图 G 的 鹅卵石指数 (pebbling exponent), 记作 $e_\pi(G)$, 表示最小的 k 使得 $G^{(k)}$ 是 0 类图. 例如, n 个顶点的图 G , 其 $G^{(\text{diam}(G))} = K_n$, 因此 $e_\pi(G) \leq \text{diam}(G)$. 因为 0 类图一定有 $2^{\text{diam}(G)} \leq n(G)$, 我们需要 $\text{diam}(G^{(e_\pi(G))}) \leq \lg n(G)$. 这为 n 个顶点的圈提供了下界

$$\frac{n/2}{\lg n} \leq e_\pi(C_n) \leq \frac{n/2}{\lg n - \lg \lg n},$$

其中上界来自于精心构建的策略证书.

以下问题是 [14] 中一个有趣的议题, 是关于带权函数的图鹅卵石游戏的可逼近性. 令 $T = T(G, r)$ 是图 G 中所有树 r -策略的集合. 得到的线性最优解 $z_r^*(T)$ 是否为一个对 $\pi(G, r)$ 的合理近似? 也就是说, 这里是否存在某个常数 c , 使得 $z_r^*(T) \leq c\pi(G, r)$? 那么 $c = 2$?

图的鹅卵石游戏的优化视角是一个活跃的研究领域. 例如 Kenter 等人 [15] 提出了针对图积的优化方法. 一般来说, 描述这些方法不可解多面体的真实面貌仍然是虚幻的.

3.4 Graham 猜想: 图积上的鹅卵石游戏

金芙蓉关于 $\pi(Q^d) = 2^d$ 的证明是归纳的, 但是为了有效归纳, 它还需要证明 Q^d 具有 2- 鹅卵石性质 (2-Pebbling Property) (2PP): 对于图 G 大小至少为 $2\pi(G) - s(C) + 1$ 的任意构形 C , 可以在任意目标顶点上放置两个鹅卵石, 其中 $\text{supp}(C)$ 表示至少有一个鹅卵石的顶点集 (C 的 支集 (support)) 且 $s(C) = |\text{supp}(C)|$.

作为金芙蓉的证明方法的一个小例子, 我们模仿她的 3 种情形, 再次证明 Petersen 图 P 是 0 类图. 注意到 P 可以分成两个 5-圈 A 和 B , 其中有匹配连接他们, 由对称性, 假设 $r \in A$, 并假设 C 是大小为 10 的一个构形. 如果 A 包含至少 5 个鹅卵石, 那么就证明完毕, 因为 $\pi(A) = 5$, 所以假设不成立. 设 r' 是 r 在 B 的邻点. 如果 r' 包含一个鹅卵石, 那么 B 中其他 5 个鹅卵石可以在 r' 上放置第 2 个鹅卵石, 然后解出 r , 所以假设不成立. 如果 A 恰好包含 4 (或 3) 个鹅卵石, 那么 B 中的 6 (或 7) 个能将至少一 (或两) 个鹅卵石移动到 A , 从而由得到的 5 个鹅卵石完成 r 处的求解. 如果 A 包含至多两个鹅卵石, 那么 B 包含至少 8 个, 那么我们可以在 r' 处放置 2 个鹅卵石, 从而将一个给到 r .

因为金芙蓉需要归纳证明立方体鹅卵石数为 n , 且满足 2PP, 她还需要证明在 3 种相似的划分情况都满足 2PP.

像往常一样, 人们可能会寻找对金芙蓉的结论更简单或者更直接的证明. 在这种情况下, 我们注意到 Q^d 是边的 d -维积. 两个图 G 和 H 的 *Cartesius* 积 (笛卡儿 product) 记作 $G \square H$. 它的顶点是成对的 (u, v) , 其中 $u \in V(G)$, $v \in V(H)$, 两个顶点 (u_1, v_1) 与 (u_2, v_2) 构成一条边当 $u_1 = u_2$ 且 $v_1 v_2$ 是 H 中的一条边或者 $v_1 = v_2$ 且 $u_1 u_2$ 是 G 中的一条边. (注意空盒符号, 表示等式 $K_2 \square K_2 = C_4$.) 例如, 图 7 表示了当 G 是 4 个顶点的星, H 是三角形的情况. 现在我们可以看到 $Q^d = Q^2 \square Q^{d-1}$. 因为 $\pi(Q^2) = 2$, 从关系式 $\pi(Q^d) \leq$

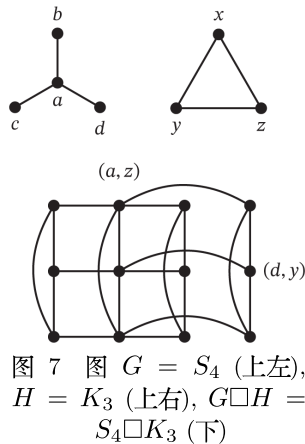


图 7 图 $G = S_4$ (上左), $H = K_3$ (上右), $G \square H = S_4 \square K_3$ (下)

$\pi(Q^2)\pi(Q^{d-1})$ 可以归纳出一个简单的证明. 这激发 Graham 产生了下面的猜想, 很多人认为这是领域内的圣杯.

猜想 6 (Graham 猜想 [6]) 对所有的图 G 和 H , $\pi(G \square H) \leq \pi(G)\pi(H)$.

已经有大量的工作验证了 Graham 猜想对很多情况都成立, 包括当 G 是完全图的积, H 具有性质 2PP [6], 当 G 和 H 是树的积 [19], 当 G 和 H 是圈的积 (Herscovici), 当 G 和 H 是每部顶点数至少是 15 的完全二部图 (Feng 和 Kim), 当 G 是树的积, H 具有性质 2PP (Herscovici), 还有很多.

这些结果的证明 (这里提到的“积”, 包含图与其自身作为一个平凡积) 都使用了其中一个图满足 2PP 的性质. 这引导讨论是否所有的图都具有 2PP 的性质, 包含完全图的积 [6], 树的积等等. Lemke [6] 发现不具有 2PP 性质的顶点最少的图. 不难看出图 8 中 Lemke 图 L 是 0 类图 (如果愿意可以尝试用证书方式证明). 然而, 所示构形 C 的大小为 $2\pi(L) - s(C) + 1 = 12$, 但不能将两个鹅卵石移动到目标 r .

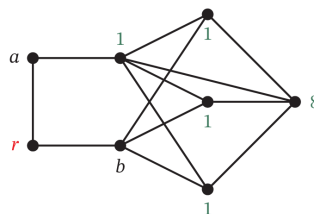


图 8 Lemke 图 L , 及其 2- 折叠 r - 不可解构形 C

事实上, 定义顶点 v 的权 $w(v) = 2^{-\text{dist}(v,r)}$, 那么构形 C 对应的权为 $w(C) = \sum_{v \in C} w(v)C(v)$. 然后, 因为所示构形 C 的权是 2, 所以 2- 折叠 r - 解 σ 无法减去任何权. 因此, 每个鹅卵石都要在 σ 中使用, 并且 σ 一定是贪婪的 (greedy), 每一个鹅卵石移动步骤都要向目标更靠近地移动. 但是这会迫使 3 个鹅卵石到达 b , 只有一个给到 a , 因此只有一个鹅卵石能放到 r 上. 任意没有 2PP 性质的图被称为一个 Lemke 图 (与 Lemke 图 L 相反), 这些图也得到很多的研究 [9]. 事实上, 拥有最少的 8 个顶点的 Lemke 图有 22 个; 每一个都是具有 17 条边的图的子图, 只有唯一的一个 (不是 L !) 包含最小的 12 条边. 此外, 我们知道很多 Lemke 图的无限族.

一个避开 2PP 必要性的结果由 Czygrinow 和 Hurlbert 给出, 该结果表明如果图 G 和 H 的顶点数至多为 n , 图 G 和 H 中顶点的最小度是 δ , 且如果 $\delta \geq 2^{(12n/\delta)+15}$, 那么 $G \square H$ 是 0 类图. 由此得出 $\pi(G \square H) = n(G \square H) = n(G)n(H) \leq \pi(G)\pi(H)$. 本质上, 对某个 c , 这表明 Graham 猜想对最小度至少为 $cn/\lg n$ 的图是成立的. 正是这些图的密度使得它们的积满足直径 - 连通度定理. 然而这个定理的重复利用最后变得不可能, 因为当顶点数以相乘的速度增长时, 度数只是加法程度的增加.

我们在讨论中看到 Graham 猜想的成立蕴含着 0 类图在 Cartesius 积下是封闭的. 所以对 0 类图验证 Graham 猜想是一个非常有趣的工作. 不幸的是, 在这个方向上几乎没有有什么进展, 可能是因为我们缺少 0 类图的充分条件.

Herscovici 给出了另一个避开使用 2PP 性质的方法. 对所有的 n , 如果 $\pi(G \square P_n) \leq \pi(G)\pi(P_n)$, 则定义图 G 具有路性质 (path property). 任意不具有路性质的图都是 Graham 猜想的反例, 所以这个有点简单的例子似乎是一个很好的开始. 因此, 一旦被证明, 人们就可以通过证明 Graham 猜想适用于具有路性质的图来证明它. 这是一条很有前途的论证路线.

另一方面, 因为大多数证明都用到了 2PP, 那么如果你喜欢故意唱反调, 怀疑 Graham

猜想是否会对 $L^2 = L \square L$ 失败似乎是合理的. 因为 L 是 0 类图, 我们应该有 $\pi(L^2) = 64$; 但真是这样么? 按照 Paul Erdős 的传统, 为了解决这个问题, [14] 的作者提供了 \$64 的悬赏.¹⁾

Gao 和 Yin 给出了支持 Graham 猜想的证据, 特别地, 性质 2PP 不应该是相关的. Snevily 和 Foster 定义一个图的无限族 $\{L_i\}_{i \geq 1}$, Gao 和 Yin 证明它们都是 Lemke 图. Wang 得到了另外一个 Lemke 图的序列 $\{L'_i\}_{i \geq 1}$. 他们证明, 对每一个 $L_i \subseteq G \subseteq L'_i$, 如果 H 是一个完全图或树, 那么 $\pi(G \square H) \leq \pi(G)\pi(H)$.

此外, Pleanmani 证明了对任意非 0 类图 G , 如果 $n \geq 2(\pi(G) - 1)/(\pi(G) - n(G))$, 那么 $\pi(G \square K_n) \leq \pi(G)\pi(K_n)$. 对于足够大的完全二部图, 他也证明了一个类似的结果.

随着 Asplund 等人 [2] 证明 $\pi(G \square H) \leq 2\pi(G)\pi(H)$ 始终成立, Graham 猜想近似形式的研究工作也已经开始. 他们实际上证明了一个更强的结论 $\pi(G \square H) \leq (\pi(G) + n(G))\pi(H)$. 对于 0 类图, 没有更好的界, 但这意味着

$$\pi(G \square H) \leq (1 + \epsilon)\pi(G)\pi(H) \text{ 当 } n(G) \leq \epsilon\pi(G),$$

例如对于具有性质 $\text{diam}(G) \geq \lg(n/\epsilon)$ 的图. 对于所有的图, 能找到比 2 更好的逼近结果么?

该问题的另一个变体是改变图积. [2] 的作者考虑了几种情形, 其中有强 (*strong*) 积 $G \boxtimes H$, 它由对 $G \square H$ 添加边而成: 在 (u_1, v_1) 与 (u_2, v_2) 之间添加边, 当 $u_1 u_2$ 是 G 的边并且 $v_1 v_2$ 是 H 的边时. (注意完整方框符号表示等式 $K_2 \boxtimes K_2 = K_4$.) 因为 $G \square H \subseteq G \boxtimes H$, 我们有 $\pi(G \boxtimes H) \leq p(G \square H)$. 关于一个 Graham 型的不等式, 他们证明每个图 G 和 H 满足 $\pi(G \boxtimes H) \leq \frac{3}{2}(\pi(G) + 1)(\pi(H) + 1)$.

3.5 计算复杂度: 图的鹅卵石游戏有多难?

上面提到的计算 $\pi(L^2)$ 的问题, 引出以下问题:

1. 确定图 G 上一个特定的构形 C 是否能解特定目标 r , 这个问题有多难?
2. 如果我们知道 C 可以解 r , 给出实际的解 σ 有多大难度?
3. 当然, 计算 $\pi(G)$ 有多难?

现快速复习复杂度理论, P 是能够在多项式时间内解决的问题集 (多项式由输入的大小测定, 输入规模在我们的例子中即是 $n(G)$), NP 是可以在多项式时间验证的问题集合, EXPTIME 是能在指数时间内解决的问题集. 集合 NP- 完全的 (或 EXPTIME- 完全的) 是所有 NP 问题 (或 EXPTIME) 可以转化成的一类问题.

对问题 1, Hurlbert 与 Kierstead 以及 Milans 与 Clark [18] 都证明, 给定图 G 及其目标顶点 r , 确定图上的构形 C 是否是 r - 可解的这一问题是 NP- 完全的. 前一对作者将这个著名的 NP- 完全问题即确定一个 4- 一致超图 (一组顶点子集, 每个的大小都是 4; 如图是 2- 一致超图) 是否具有一个完美匹配 (一组分割顶点的边集合), 转化为图的鹅卵石游戏问题的可解性.

这个简短的证明表明另一个很好的权论证, 因此值得在此介绍.

1) 不要与 \$64,000 问题混淆了! —— 原注

设 \mathcal{H} 是一个顶点数为 2^{m+2} 的 4-一致超图, 边集合 $E(\mathcal{H}) = \{e_1, \dots, e_k\}$ (不难证明此处规定的顶点数并没失去一般性). 如下定义 鹅卵石游戏图 (pebbling graph) $G = G_{\mathcal{H}}$. 顶点集为 $V(G) = V(\mathcal{H}) \cup E(\mathcal{H}) \cup \{u_1, \dots, u_k\} \cup \{r, w_1, \dots, w_m\}$. 边集合 $E(G)$ 包含 ve_i 对每个 $v \in e_i$, 以及对所有 $i \leq k$ 包含路 $w_m u_i e_i$ 和路 $rw_1 \cdots w_m$ (图 9). 现在定义构形 $C = C_{\mathcal{H}}$, 对所有 $v \in V(\mathcal{H})$, 取 $C(v) = 2$, 否则为 $C(v) = 0$. 然后我们证明 C 是 r -可解的当且仅当 \mathcal{H} 有完美匹配.

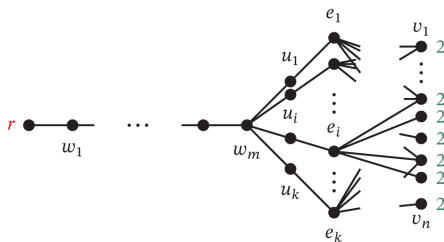


图 9 有构形 $C_{\mathcal{H}}$ 的鹅卵石游戏图 $G_{\mathcal{H}}$

如上所述定义构形的权. 注意到构形的权不会随着鹅卵石移动步骤而增加, 当且仅当鹅卵石移动步骤是贪婪的, 权才会保持不变. 所以, 由于在目标 r 上放置一个鹅卵石的构形函数其权至少是 1, 所以任何 r -可解构形的权必须至少是 1. 特别是, 因为 $G_{\mathcal{H}}$ 上构形的权为 1, 因此它只能通过贪婪的步骤才能求解 r , 在这个过程中所有的鹅卵石都要用到. 换句话说, 图 9 中的所有鹅卵石移动步骤都需要从右向左移动.

这意味着两件事. 首先, 每个 e_i 能接收最多 4 个鹅卵石, 因为 e_i 正好跟 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 有 4 条边. 其次, w_m 从 e_i 接收的每个鹅卵石都恰好是来自 4 个在 e_i 的鹅卵石. 因此, 从右侧到达每个 e_i 的鹅卵石数量是 0 或 4. 此外, 没有两个接收鹅卵石的 e_i 和 $e_{i'}$ 共享同一个邻居 v_j , 因为 v_j 仅能向其中一个转移一个鹅卵石; 也就是说, \mathcal{H} 的边满足 $e_i \cap e_{i'} = \emptyset$. 现在, 需要 w_m 上的 2^m 个鹅卵石才能到达 r , 所以它必须从一组 2^m 个不同的 e_i 中接收它们, 正是这组 e_i 构成的集合在 \mathcal{H} 中形成完美匹配.

现在更容易看出, \mathcal{H} 的一个完美匹配确实可以得到一个 r -解, 这就完成了证明.

按照 NP-完全问题的研究惯例, 我们通常会取寻找使得问题为多项式的图类, 我们有一些很好的结果. 例如, Milans 和 Clark 利用了 3SAT (satisfiability) 这一典型的 NP-完全问题的转化, 给出了 NP-完全的证明, 并表明即使对最大度为 3 的二部图, 上述问题依然是 NP-完全的. 类似地, Cusack, Lewis, Simpson 和 Taggart 证明了对直径为 2 的图仍是 NP-完全的. 而 Lewis, Cusack 和 Dion 则证明对平面图 (可以在平面上绘制且没有交叉边的图) 同样如此 [17]. 然而, 值得注意的是, 他们还证明了对直径为 2 的平面图则是 P 的! 这个研究领域还需要更多的工作.

对于问题 3, Milans 和 Clark [18] 能够证明判定问题 “是 $\pi(G) \leq k$ ” 是 Π_2^P -完全的, 是 NP 以外多项式时间分层一部分的一个分类. 这使得图的鹅卵石游戏成为一个超越 NP 但不足 EXPTIME 完全的极好示例. 沿着这个思路, Mendes, Pula, Wiedenbeck 和 Yerger 最近通过双层整数规划将图的鹅卵石游戏与经济学中的双人 Stackelberg 对策结合起来.

尽管如此, 我们仍然看到很多类图的鹅卵石数可以在多项式时间内计算. 例如, Herscovici, Hester 和 Hurlbert 证明了直径为 2 的图的鹅卵石数可以在 $O(n^4)$ 时间内计算. 不过这种类型的结果首先来自于树, 这一过程依赖于构建树到路的分解: 路划分 (path partition). 设 $\mathcal{P} = \{P^1, \dots, P^m\}$ 是树 T 的一个路划分, 每个 P^i 的长度为 ℓ_i (即 $P^i \cong P_{\ell_i+1}$), 按照非增顺序书写. 如果 r 是 P^1 的端点, 且包含在任意别的路 P^i 中, 那么 \mathcal{P} 称为 r -

路划分 (*r-path partition*). 我们称 r -路划分 \mathcal{P} 优于 (*majorizes*) 另一个 r -路划分 \mathcal{P}' , 如果存在 j 使得对所有的 $i < j$ 有 $\ell_i = \ell'_i$ 并且 $\ell_j > \ell'_j$. 如果 \mathcal{P} 优于每个 r -路划分, 那么它是最大的 (图 10). 金芙蓉证明了如下定理.

定理 7 (Chung [6]) 给定树 T 的最大 r -路划分, 如果每条路的长度分别为 ℓ_1, \dots, ℓ_m , 那么 $\pi_t(T, r) = t^{2^{\ell_1}} + \sum_{i=2}^m 2^{\ell_i} - m + 1$.

可以想想, 最大的 t -折叠 r -不可解构形将所有的鹅卵石放在 T 的非 r 叶子上; 事实上也是如此. 定义一个构形 C_T , 在 P^1 的叶子上放置 $t^{2^{\ell_1}} - 1$ 个鹅卵石, 剩下的其他路 P^i 的叶子上放置 $2^{\ell_i} - 1$ 个鹅卵石. 那么, 没有路 $P^i (i > 1)$ 有足够的鹅卵石能到达另一侧端点, P^1 也不能单独将 t 个鹅卵石放在 r 上. 金芙蓉的证明是在 n 和 t 上进行归纳的, 涉及由 $T - r$ 的分支构成的子树; 其他证明使用的另外的归纳步骤 (Moews), 总权 [4], 或者权函数引理 [14], 并将公式推广到每条边具有单位鹅卵石费用的情形 (Curtis-Hines-Hurlbert-Moyer). Bunde 等人 [4] 找到了一种线性算法来构造任意树的最大路划分.

这带来了其他弦图 (*chordal graph*) 族的相关结果, 这些弦图族由不含有长度超过 3 的诱导圈定义, 其特征于是一个单独的顶点或者包含一个单纯 (*simplicial*) 顶点, 该顶点的所有邻居组成一个完全子图, 删除这个点会留下一个弦图. (没有圈的树是平凡的弦.) 这类图中可以多项式时间计算鹅卵石数的例子包括分裂图, 2-路, 半 2-树 (Alcón-Gutierrez-Hurlbert), 路和完全图的强积 (Sieben), 路的幂 [1]. 在某些情况下, 一个类中的图有多个鹅卵石数公式可以选择. 分裂图的情况包含 6 个不同的公式, 取决于其结构. 算法运行 $O(n^\beta)$ 步, 其中 $\beta = 2w/(w+1) \cong 1.41$, $w \cong 2.376$ 是矩阵乘法的指数. 除了分裂图外, 它们的一个共同点是这些图不包含诱导金字塔.

猜想 8 (Alcón 等 [1]) 不包含金字塔结构的弦图, 其鹅卵石数可以在多项式时间内计算.

有趣的是, Bender, Richmond 和 Wormald 证明了几乎所有的弦图都是分裂图. 所以几乎所有的弦图的鹅卵石数都可以在多项式时间内计算.

对于问题 2, 迄今为止还工作甚少. 为了更准确的说明这个问题, 假设 G 是一个图, C 是以 r 为目标点大小为 $\pi(G, r)$ 的构形. 根据定义, 我们知道 C 是 r -可解的. 那么, 是否一直可能在多项式时间内计算求得一个 r -解?

对于树来说答案是肯定的. 对于任意鹅卵石移动步骤的集合 σ , 可以定义转移有向图 (*transition digraph*) G_σ , 有向边的重图表示 σ 中的每个鹅卵石移动步骤. Moews 的无圈引理表明, 如果 σ 是一个 r -解, 那么存在某个 r -解 σ' 使得 $G_{\sigma'}$ 是无圈的. 这在直觉上是自然的: 一个鹅卵石沿着圈移动回到它的位置, 会导致其他鹅卵石没有收益只有损失. 所以, 我们将注意力集中到极小的 (*minimal*) r -解上: 对这样的解, 任何步骤的删除都会使得剩下的部分不再是一个 r -解. 对于树的情况, 最小的 r -解只需要朝向 r 移动, 在每步减少与 r 的距离, 这样的解法是贪婪的.

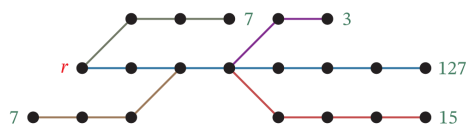


图 10 树 T 的一个最大 r -路划分 $\mathcal{P} = \{P^1, P^2, P^3, P^4, P^5\}$, 以及对应的 t -折叠 r -不可解构形函数 C_T

贪婪解在计算某些鹅卵石数时起到重要作用. 例如, 求解的费用 (*cost*) 是用到鹅卵石的数量 (等于鹅卵石移动步骤数加 1). 可以证明, 极小贪婪解的费用至多为 2^d , 其中 d 是图的直径, 这类解称为 廉价的 (*cheap*). 例如, 2-路 (*2-path*) 要么是至多 3 个顶点构成的完全图, 要么是正好有两个单纯顶点的弦图, 使得每个极大完全子图都是三角形. 如 Alcón 等人所示, 如果图 G 是 n 个顶点直径为 d 的 2-路, 那么 $\pi_t(G) = t2^d + n - d + 1$. 他们方法的一部分显示出, 大小最少为 $\pi_2(G)$ 的构形可以得到一个贪婪的解, 因此廉价的解. 因此由归纳法, $(t-1)2^d + n - d + 1$ 个鹅卵石仍然可以产生 $t-1$ 个额外的解. 有很多机会能应用这个技术.

不幸的是, 并非弦图的所有解都是贪婪的 (除了构形的大小远超过图的鹅卵石数时). 不过, 如果将一个鹅卵石从一个顶点移动到相邻顶点, 而且新的顶点到 r 的距离不会增加, 那么我们称这样的鹅卵石移动步骤为 半贪婪的 (*semigreedy*). Alcón 等 [1] 证明了所有的弦图都是半贪婪的: 弦图 G 上每一个大小为 $\pi(G, r)$ 的构形都有一个半贪婪的 r -解. 此外, 他们还证明了另一个定理, 使人想起树上的情形. 潜力 (*potential*) 顶点 v 是在构形中包含至少两个鹅卵石的顶点. 他们证明如果 G 是弦图, 且 C 是一个 r -可解的最大数量的构形, 那么每一个潜力顶点都是单纯的.

金芳蓉关于立方体是 0 类图的证明间接证明了立方体是贪婪的. 她的证明可以很容易地转化为一个显式算法, 该算法只需要采用贪婪步骤, 运行时间为 $n \lg n$. 这直接应用于在多项式时间内求 Abel 群的零和问题. 对其他图类来说, r -求解图 G 上大小为 $\pi(G)$ 的构形的算法在其他图类中将会很有用.

4. 鹅卵石的变化形式

4.1 目标鹅卵石: 满足多项要求

在同一个目标顶点上放置 t 个鹅卵石只是一种推广形式. 相反, 我们可能感兴趣的是目标分布 (*target distribution*)¹⁾ D , 从充分大的图 G 上的任何构形出发, 在每个点 v 上都放上 $D(v)$, 也就是求解 (*solving*) D . 从供需角度来看, 这可能是更自然的最优化问题. 目标鹅卵石数 (*target pebbling number*) $\pi(G, D)$ 表示最少鹅卵石数量, 使得当前大小的构形是 D -可解的. 这个问题的第一个实例出现在 Crull 等人 [8] 的研究中, 其中对所有的顶点 v , $D(v) = 1$; 在这种形式下, $\pi(G, D)$ 也就是覆盖鹅卵石数 (*cover pebbling number*). 一个叠加 (*stacked*) 构形 (或者目标分布) 是将它的所有鹅卵石 (或目标) 放置在单个顶点上. 一个正 (*positive*) 分布 D 对每个顶点 v , 有 $D(v) > 0$. Sjöstrand 推广并证明 [8] 中的猜想, 对任意图 G , 如果 D 是一个正目标分布, 且 C 是最大的 D -不可解构形, 那么 C 是叠加的. 由此可以容易计算 $\pi(G, D) = \max_v \sum_u 2^{\text{dist}(u,v)}$. 因此当 D 非正的情形更值得研究.

Herscovici 等人猜想, 对每个大小为 t 的 D , 所有图 G 都满足 $\pi(G, D) \leq \pi_t(G)$. 直觉上来说, 如果 $|C| \geq \pi_t(G)$, 那么 C 能将 t 个鹅卵石放置到 G 的任意顶点上. 那么, 看起来有理由相信 C 能将 t 个鹅卵石放置在 t 个顶点的任何组合上. 这感觉有点凸性概念.

1) 构形和分布都是函数 $V(G) \rightarrow \mathbb{N}$. 但是为了避免混淆, 我们讨论鹅卵石时使用构形, 讨论目标时使用分布. ——原注

作者在满足 $\pi(G) = 2^{\text{diam}(G)}$ 的图 G 上验证了猜想, 例如完全图, 偶圈, 立方体, 以及树和奇圈. 这被称为弱目标猜想, 最近 Hurlbert 和 Seddiq 也对 2-路和 Kneser 图 $K(m, 2)$ 进行了验证.

对图做更进一步的分析, 例如完全图, 每个最大的 t -折叠 r -不可解构形都有潜力 $t-1$, 所以除了 r 以外的每个顶点上都有奇数个鹅卵石; 特别地, $C(r) = 0$, 对每个 $v \neq r$, $C(v) > 0$. 对于一般的 D , 这种极值构形一定对所有的 $u \in D$ 满足 $C(u) = 0$, 所以 D 每个额外的目标都会将 $\pi(G, D)$ 减 1. 与构形一样, 定义分布的支集, 记作 $\text{supp}(D)$, 表示满足 $D(u) > 0$ 的顶点集, 其中 $s(D) = |\text{supp}(D)|$. 那么下面的猜想对完全图成立, 它看起来就很自然了.

猜想 9 (强目标猜想 [1]) 对于每个图 G 及其上大小为 t 的目标分布 D , 有 $\pi(G, D) \leq \pi_t(G) - s(D) + 1$.

文献 [1] 的作者验证了猜想对树和路的幂成立. 进一步探索树是很有趣的: 例如, 可以想象一个树 T 的另类划分可能会产生 $p(T, D)$ 的显式公式. 我们甚至对 $|D| = s(D) = 2$ 的情形都是未知的.

最后, 还能从文献 [1] 找到研究目标分布的另一个动机, 即与 Graham 猜想的联系. 在那里, 他们假定推广形式为 $\pi(G_1 \square G_2, D_1 \times D_2) \leq \pi(G_1, D_1)\pi(G_2, D_2)$, 这也蕴含着 Herscovici 和 Lourdusamy 的猜想. 通常情况下, 找到问题的正确推广形式是解决问题的关键.

4.2 最优鹅卵石游戏: 寻找最佳构形

在这里, 我们稍微改变一下范式. 到目前为止, 我们一直在考虑最坏的情况: 不能解决某些目标的最大构形. 现在我们考虑最好的情况: 可以解决所有目标的最小构形. 前者就像一场双人游戏, 你的对手在游戏中放置鹅卵石; 最优鹅卵石游戏是一个纸牌游戏, 你要放置自己的鹅卵石. 这非常类似于寻找警察抓捕盗贼的最佳位置, 或是确定最小距离 $-d$ 支配集. Pachter 等人首次定义图 G 的最优鹅卵石数 (*optimal pebbling number*), 记作 $\pi^*(G)$, 表示最小的 m , 使得大小为 m 的某个构形 C 对所有 r 都是 r -可解的. 确定 $\pi^*(G) \leq k$ 是否成立比研究 $\pi(G)$ 的同一问题要更容易, 但是它仍然是 NP-完全的 [18]. 然而, 在这种情况下, Shiue 证明 Cartesius 积的界是成立的:

$$\pi^*(G \square H) \leq \pi^*(G)\pi^*(H).$$

Pachter 等人证明对所有的 $k \geq 0, 0 \leq r \leq 2$, 有 $\pi^*(P_{3k+r}) = 2k + r$ (Friedman 和 Wyels 对圈也证明了相同的结果). 基本上, 在路上每 3 个点放置 2 个鹅卵石, 并在任何剩余顶点上添加一个鹅卵石, 由归纳法可知这是最好的结果. Bunde 等人 [4] 仔细地将这种构形推广到树 T 上, 得到 $\pi^*(T) \leq \lceil 2n/3 \rceil$, 所以对所有图 $G, \pi^*(G) \leq \lceil 2n/3 \rceil$. 注意到在这个路构形 C 中, 任意没放置鹅卵石的顶点都与放置一个鹅卵石的顶点相邻, 也就是说, $\text{supp}(C)$ 是支配集 (*dominating set*). 更一般地, 定义 $\gamma(G)$ 为 G 中最小支配集的大小. 那么我们总有 $\pi^*(G) \leq 2\gamma(G)$. 因此, 寻找各种类型的支配集是该领域的主要方法 (抱歉, 这个我们没有办法拒绝), Chellali 等人 [5] 将最优鹅卵石变化形式与多种不同的支配参数联系起来.

特别地, 图 G 中距离 $-k$ 支配集 (*distance- k dominating set*) S 是 G 的一个顶点集, 使得 G 中任意顶点与 S 中某个顶点的距离小于 k . 这类集合的最小规模记作 $\gamma_k(G)$, 可以得到更一般的界

$$\pi^*(G) \leq 2^k \gamma_k(G). \quad (3)$$

立方体中距离 $-k$ 支配集的一个例子是可纠正多达 k 个错误的纠错码. 事实上, Moews 利用 Cohen (科恩) 的结果 $\gamma(Q^d) \leq 2^m$, 其中 $m \leq d(1 - H(k/d)) + 2 \lg d$, $H(x) = -x \lg x - (1-x) \lg(1-x)$, 证明了 $\pi^*(Q^d) \leq 2d^2(4/3)^d$. 之后这个结论被 Fu, Huang 和 Shiue 进行了改进

$$\pi^*(Q^d) = O(d^{3/2}(4/3)^d).$$

对于下界 $\pi^*(Q^d) \geq (\frac{4}{3})^d$, Moews 引入了一种连续最优鹅卵石版本, 它具有实数值的构形和鹅卵石移动步骤, 仍有着 50% 费用, 以及对应的参数 $\hat{\pi}^*$. 例如, $\hat{\pi}^*(Q^1) = 4/3$: 在每个顶点上放置 $2/3$, 如果放置具有较小总和的任何其他值 a 和 b , 那么将无法把 1 移动到两者之中的较小值上. 因为整数构形也是实数构形, 可知对所有 G , $\hat{\pi}^*(G) \leq \pi^*(G)$. 之后 Moews 为了得到下述结果证明了 Graham 猜想的一个更强版本:

$$\hat{\pi}^*(G \square H) = \hat{\pi}^*(G) \hat{\pi}^*(H).$$

最后, 他借鉴 Cohen 的概率方法, 即一个大小合适的随机选择集合具有正概率成为距离 $-k$ 支配集, 证明了任意图 G 满足 $\pi^*(G^d) = \hat{\pi}^*(G)^{d+O(\lg d)}$, 其中 G^d 表示图 G 与它自身做 d 次 Cartesian 积.

研究 $\pi^*(G)$ 随着 G 最小度的增加而如何减小是很自然的. 设 $N_k(v)$ 表示与 v 距离小于 k 的顶点集合, 大小为 $\deg_k(v)$, 并定义 $\delta_k(G) = \min_v \deg_k(v)$. 记 $N_k(U) = \bigcup_{u \in U} N_k(u)$. 通常, 当 $k=1$ 时我们去掉下标. 在文献 [4] 中, 我们发现 Czygrinow 的巧妙观点, 每个图 G 都有 $\gamma_{2k}(G) \leq n/\delta_k(G)$. 实际上, 从任意顶点 $v \in G$ 开始, 构造一个距离 $-2k$ 支配集 S , 初始化为 $T = N_k(v)$. 如果 T 不是距离 $-k$ 支配集, 那么将任意顶点 $u \notin N_k(T)$ 添加进 S , 并把 $N_k(u)$ 添加到 T (这是不相交的并集). 当 S 的大小为 $n/\deg_k(G)$ 时, T 是一个距离 $-k$ 支配集, 使得 S 是一个距离 $-2k$ 支配集. 例如, 他将这个界应用到 (3) 中的界, 从而得到

$$\pi^*(G) \leq 4\gamma_2(G) \leq 4 \left(\frac{n}{\delta+1} \right).$$

Czygrinow, Hurlbert, Katona 和 Papp 证明确切的界虽然是紧的, 但是无法达到: 对任意 $\epsilon > 0$, 存在直径为 2 的图 G (具体来说 $\overline{K_{\sqrt{n}} \square K_{\sqrt{n}}}$) 满足 $\pi^*(G) > (4-\epsilon) \left(\frac{n}{\delta+1} \right)$. 尽管如此, 他们证明了当 $\text{diam}(G) \geq 3$ 时, 上界中的系数可以提升为 3.75. 他们还得到, 对任意 $\epsilon > 0$, 由无限多个图的系数至少为 $\frac{8}{3} - \epsilon$, 给读者留些很小的改进空间.

令人惊讶的是下述一个尚未解决的有趣问题. Györi 等人 [11] 证明了

$$(2/13)mn \leq \pi^*(P_m \square P_n) \leq (2/7)mn,$$

但是正确的界是未知的. 到目前为止, 尚未探索的最终目标是对某个目标 D 来研究 $\pi^*(G, D)$. 也就是说, 可能不需要潜在地到达每个顶点, 也可能需要多次到达某些顶点.

4.3 鹅卵石阈: 随机情形

现在我们已经讨论了最坏和最好的情况, 让我们思考一下由 Czygrinow, Eaton, Hurlbert 和 Kayll 提出的“典型”的情形.

在这个范式下, 鹅卵石游戏者和他们的对手都不能控制初始构形 C ; 相反, 它是随机选择的. 自然地, 大的构形将以更高概率可求解, 而小的构形将以较低概率可求解. 人们可能想知道是否存在某种阈, 即相变, 在该阈附近, 低概率急剧地转化为高概率. 事实上, 这个阈确实存在.

在深入细节以前, 让我们非正式地说明一下鹅卵石阈是 Feller (费勒) 著名生日问题的无标号版本的推广! 考虑完全图 K_n . 我们想知道“如果随机地把鹅卵石放置在顶点上, 需要多少鹅卵石 (n 的函数)”可以使鹅卵石到达任意顶点的概率趋向于 1? 实际上, 在 K_n 上, 小于 n 的构形是可解的当且仅当某个顶点有至少两个鹅卵石. 就像生日问题一样, 这需要 $\Theta(\sqrt{n})$ 个鹅卵石, 所以对完全图类的鹅卵石阈为 $\Theta(\sqrt{n})$.

为了做得正规些, 考虑一个顶点数增加的无限图序列 $\mathcal{G} = (G_1, G_2, \dots)$, 以及一个正整数序列 (m_1, m_2, \dots) . 定义 $\mathbf{p}(G_i, m_i)$ 为有 m_i 个鹅卵石的随机选择的构形 C 在 G_i 上是可解的 (solvable) (即对所有的 r 是 r -可解的) 概率. 注意到, 与独立随机放置每个鹅卵石相反, 我们是根据某些固定概率, 从固定大小为 m 的 $V(G)$ 上所有构形构成的集合中, 均匀随机选择 C . \mathcal{G} 的鹅卵石阈函数 (pebbling threshold function) $t(k)$ 是 \mathbb{N} 上的函数, 使得在 $k \rightarrow \infty$ 时, 只要 $m_k/t(k) \rightarrow \infty$ (相应地 0) 时, 即有 $\mathbf{p}(G_k, m_k) \rightarrow 0$ (相应地 1). 我们用 $\tau(\mathcal{G})$ 表示 \mathcal{G} 的所有阈构成的集合.

当然, 对于任何特定的图序列, 先验地存在一个鹅卵石阈都是没有理由的! 然而, 我们有以下定理.

定理 10 (Bekmetjev 等人 [3]) 每个图的无限序列都有一个鹅卵石阈函数.

这个定理的证明用到了极值集合理论中的漂亮结果, 所以我们概述如下. 对于图 G , 定义 G 上的所有不可解构形族 \mathcal{F} , 其中 \mathcal{F}_m 的大小为 m . 我们可以将每个构形看成 m 个顶点上的多重集, 其中有 $\binom{n}{m} = n(n-1)\cdots(n-m+1)/m!$. 那么当 $|C| = m$ 时, 我们有 $\mathbf{p}(C) = |\mathcal{F}_m|/\binom{n}{m}$. 对 $V(G)$ 的多重集的任意族 \mathcal{A} , 定义阴影 (shadow) $\partial\mathcal{A}_m = \{A - v \mid v \in A \in \mathcal{A}_m\}$. 注意到 $\partial\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_{m-1}$, 这就是我们所说的单调的 (monotone). 在子集格中, 著名的 Kruskal-Katona 定理给出一个精确的公式, 用于计算大小为 M 的 m -子集族 \mathcal{B}_m 的最小阴影大小, 这基于所谓的 $|\mathcal{B}_m|$ 的“级联表示”, 我们不在这里讨论. 这个公式非常漂亮, 但是很难在计算中使用. 为此, 我们依靠 Lovász (罗瓦兹) 的极好逼近, 它表明对任意实数 x , 如果 $|\mathcal{B}_m| = \binom{x}{m} = x(x-1)\cdots(x-m+1)/m!$, 那么 $|\partial\mathcal{B}_m| \geq \binom{x-1}{m-1}$. 之后 Bollobás 和 Thomason 用它来证明了对于单调的 \mathcal{B} , 如果 $j < k$, 那么 $\mathbf{p}(\mathcal{B}_j)^k \geq \mathbf{p}(\mathcal{B}_k)^j$, 其中 $\mathbf{p}(\mathcal{B}_m) = |\mathcal{B}_m|/\binom{n}{m}$. 由此可知, 如果我们将这些计算应用到无限图序列 (G_1, G_2, \dots) 上, $n(G_i)$ 递增且族 $\mathcal{B}_m(i)$ 定义在 G_i 上, 其中 m 是 n 的函数, 那么存在阈 $t = t(\mathcal{B})$, 使得随着 $t \rightarrow \infty$, 当 $m/t \rightarrow 0$ 时, $\mathbf{p}(\mathcal{B}_m) \rightarrow 1$, 当 $m/t \rightarrow 1$ 时, $\mathbf{p}(\mathcal{B}_m) \rightarrow 0$.

Clements 和 Linström 成功地将 Kruskal-Katona 定理推广到 (无限) 多重集格. 之后 Bekmetjev 等人 [3] 证明了 Lovász 不等式的类似形式, 如果 \mathcal{A} 是一个多重集族, 且

$|\mathcal{A}_m| = \binom{x}{m}$, 那么 $|\partial\mathcal{A}_m| \geq \binom{x}{m-1}$, 并使用它来解决单调多重集族 \mathcal{A} 阈 $\tau(\mathcal{A})$ 的存在性. 定理 10 特别针对图序列不可解构形的单调多重集族来说明这一点.

关于图序列的具体实例, 回想一下 $\tau(K_n) = \Theta(\sqrt{n})$. 谱的另一端是路 \mathcal{P} 的序列. 一系列的论文得出了下界 (Czygrinow-Hurlbert) 和上界 [3] $\tau(\mathcal{P}) \subseteq \Omega(n2^{c\sqrt{\lg n}}) \cap O(n2^{C\sqrt{\lg n}})$, 对任意 $c < 1 < C$. 最后, Moews 最近找到了答案:

$$\tau(\mathcal{P}) = \Theta(n2^{\sqrt{\lg n}}/\sqrt{\lg n}).$$

不难看出, 每个图的阈都位于 $\tau(\mathcal{K})$ 和 $\tau(\mathcal{P})$ 之间, Moews 证明对于该范围内的每个函数 g , 都存在一个图序列 \mathcal{G} 使得 $\tau(\mathcal{G}) = \Theta(g)$. Czygrinow, Eaton, Hurlbert 和 Kayll 证明如果 \mathcal{G} 是具有有界直径的图序列, 则 $\tau(\mathcal{G}) \in O(n)$, 而如果图最小度 δ 满足 $\sqrt{n} \ll \delta < n$, 那么 $\tau(\mathcal{G}) \in O(n^{3/2}/\delta)$ (对于 $\delta \in \Theta(n)$, 可以得到 $\Theta(\sqrt{n})$) (Czygrinow-Hurlbert).

有趣的是, Björklund 和 Holmgren 证明了 π 和 τ 并不总是正相关的. 图中顶点的 v 的拉开 (blow-up) 是将 v 替换成一个完全图, 该图的每个顶点都与 $N(v)$ 的每个顶点相邻. 例如, 一条恰当长度路的端点的拉开能实现上述 Moews 密度结论中所需的图序列. 这里, Björklund 和 Holmgren 定义 G_n 为从长度为 $\lg n$ 的路的端点拉开为 n 个顶点的图, H_n 为从长度为 $\lg n + c$ 的路的中点拉开为 n 个顶点的图, 并证明了 $\pi(G_n) \leq 3n \ll \pi(H_n)$. 之后, 对于 $\mathcal{G} = (G_n)_{n \geq 1}$, $\mathcal{H} = (H_n)_{n \geq 1}$, 他们证明了 $\tau(\mathcal{H}) \in O(n^{0.8})$, 而 $\tau(\mathcal{G}) \in \Omega(n^{0.99})$. 他们还给出了 \mathcal{G} 与 \mathcal{H} 的更复杂和极端的例子, 包含 \mathcal{G} 与 \mathcal{H} 满足 $\pi(G_n) \ll \pi(H_n)$, $\tau(\mathcal{H})$ 任意接近 $\tau(\mathcal{K})$, 和 $\tau(\mathcal{G})$ 任意接近 $\tau(\mathcal{P})$.

阈的讨论通常是局部的. 对于上界, 通常可以看出很多鹅卵石的随机构形几乎总能在每个小子图中放置充分多的鹅卵石. 对于下界, 通常可以看出少量鹅卵石的随机构形几乎总是包含一个大洞, 某个没有任何鹅卵石的 $N_k[v]$, 不能移动足够的鹅卵石到洞的边界使其足够到达 v . 大小意味着什么和采用了什么样的概率方法, 这些细节跟随实例而变动.

沿着 Cartesius 积这个思路, Alon 和 Czygrinow-Wagner (瓦格纳) 都给出了立方体的序列 $Q = (Q^d)_{d \geq 1}$ 的界:

$$\tau(Q) \in \Omega(n^{1-\epsilon}) \cap O(n/(\lg \lg n)^{1-\epsilon}) \text{ 对所有的 } \epsilon > 0.$$

这个有进一步紧缩改进的空间. 对于完全图积的序列 $\mathcal{K}^2 = (K_k^2)_{k \geq 1}$, Bekmetjev 和 Hurlbert 证明了 $\tau(\mathcal{K}^2) = \Theta(\sqrt{n})$. 这满足以下 Graham 猜想的自然阈版本, 它需要仔细说明来解释 n 的缩放 (即 $n(G_k \square H_k) = n(G_k)n(H_k)$).

猜想 11 (Hurlbert [12]) 令 $\mathcal{F} = (F_k)_{k \geq 1}$, $\mathcal{G} = (G_k)_{k \geq 1}$ 以及 $\mathcal{H} = (H_k)_{k \geq 1}$, 其中 $F_k = G_k \square H_k$, 并假设 $f \in \tau(\mathcal{F})$, $g \in \tau(\mathcal{G})$ 和 $h \in \tau(\mathcal{H})$. 那么

$$f(n(F_k)) \in O(g(n(G_k))h(n(H_k))).$$

另外还有两个方向值得探索. 一个是改变生成随机构形的模型. 在随机图中, 集中时间, 静态和 Erdős-Reyni 模型都是一致的, 与此不同, 不同的构形模型可以改变阈. 例如, Czygrinow 和 Hurlbert 证明了如果鹅卵石被标号且每个鹅卵石均可以选择自己的顶点, 那么路阈下降到 $\Theta(n \lg n / \lg \lg n)$. 最后, 我们还可以考虑鹅卵石覆盖的阈, 正如 Godbole, Watson 和 Yerger 所研究的那样, 他们证明了下面这个清晰的结果. 令 $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$,

$w = w(n) \rightarrow \infty$. 那么当 $|C| \geq \phi n + w\sqrt{n}$ 时, 在 K_n 上的均匀随机构形几乎肯定是覆盖可解的, 当 $|C| \leq \phi n - w\sqrt{n}$ 时, 几乎肯定不是覆盖可解的.

5. 结论

图的鹅卵石游戏问题中的挑战涉及图论以外的不同数学领域, 包含数论, 优化, 计算, 极值集合论和概率. Lemke-Kleitman 猜想 3 的一般情形仍然是未定的. 鹅卵石游戏在类似组合数论问题中也发挥了重要作用. 例如, Knapp [16] 最近利用鹅卵石游戏技术证明了某些齐次加法方程的 2- 进解的存在性! 从另一个角度来看, 计算的挑战是艰巨的; 任何向此类参数高效计算的进展都能够给图的鹅卵石游戏的研究带来巨大进步. 当然, 这些是对 Graham 猜想的补充.

不管你的学术背景如何, 我们都邀请你和你的学生来玩鹅卵石游戏! 一起期待它在数学其他领域的精巧应用以及它们之间更多的连结!

参考文献

- [1] L. Alc3n and G. Hurlbert, Pebbling in powers of paths, in preparation.
- [2] John Asplund, Glenn Hurlbert, and Franklin Kenter, Pebbling on graph products and other binary graph constructions, *Australas. J. Combin.* 71 (2018), 246–260. MR3786909
- [3] Airat Bekmetjev, Graham Brightwell, Andrzej Czygrinow, and Glenn Hurlbert, Thresholds for families of multisets, with an application to graph pebbling, *Discrete Math.* 269 (2003), no. 1–3, 21–34, DOI 10.1016/S0012-365X(02)00745-8. MR1989450
- [4] David P. Bunde, Erin W. Chambers, Daniel Cranston, Kevin Milans, and Douglas B. West, Pebbling and optimal pebbling in graphs, *J. Graph Theory* 57 (2008), no. 3, 215–238, DOI 10.1002/jgt.20278. MR2384021
- [5] Mustapha Chellali, Teresa W. Haynes, Stephen T. Hedetniemi, and Thomas M. Lewis, Restricted optimal pebbling and domination in graphs, *Discrete Appl. Math.* 221 (2017), 46–53, DOI 10.1016/j.dam.2016.12.029. MR3612586
- [6] Fan R. K. Chung, Pebbling in hypercubes, *SIAM J. Discrete Math.* 2 (1989), no. 4, 467–472, DOI 10.1137/0402041. MR1018531
- [7] Daniel W. Cranston, Luke Postle, Chenxiao Xue, and Carl Yerger, Modified linear programming and class 0 bounds for graph pebbling, *J. Comb. Optim.* 34 (2017), no. 1, 114–132, DOI 10.1007/s10878-016-0060-6. MR3661069
- [8] Betsy Crull, Tammy Cundiff, Paul Feltman, Glenn H. Hurlbert, Lara Pudwell, Zsuzsanna Szaniszl3o, and Zsolt Tuza, The cover pebbling number of graphs, *Discrete Math.* 296 (2005), no. 1, 15–23, DOI 10.1016/j.disc.2005.03.009. MR2148478
- [9] Charles A. Cusack, Mark Powers, and Airat Bekmetjev, Doppelgangers and Lemke graphs, *Discrete Math.* 341 (2018), no. 10, 2686–2693, DOI 10.1016/j.disc.2018.06.028. MR3843253
- [10] Andrzej Czygrinow, Glenn Hurlbert, H. A. Kierstead, and William T. Trotter, A note on graph pebbling, *Graphs Combin.* 18 (2002), no. 2, 219–225, DOI 10.1007/s003730200015. MR1913664
- [11] Ervin Gy3ri, Gyula Y. Katona, and L3szl3o F. Papp, Optimal pebbling number of the square grid, *Graphs Combin.* 36 (2020), no. 3, 803–829, DOI 10.1007/s00373-020-02154-z. MR4090527
- [12] Glenn Hurlbert, General graph pebbling, *Discrete Appl. Math.* 161 (2013), no. 9, 1221–1231, DOI 10.1016/j.dam.2012.03.010. MR3030615

- [13] Glenn Hurlbert, Graph pebbling, Handbook of Graph Theory, 2nd ed., Chapman and Hall/CRC, Kalamazoo, MI, 2014, pp. 1428–1449.
- [14] Glenn Hurlbert, The weight function lemma for graph pebbling, J. Comb. Optim. 34 (2017), no. 2, 343–361, DOI 10.1007/s10878-016-9993-z. MR3672394
- [15] Franklin Kenter, Daphne Skipper, and Dan Wilson, Computing bounds on product graph pebbling numbers, Theoret. Comput. Sci. 803 (2020), 160–177, DOI 10.1016/j.tcs.2019.09.050. MR4044805
- [16] Michael P. Knapp, Distance pebbling on directed cycle graphs, J. Combin. Math. Combin. Comput. 111 (2019), 283–293. MR4222723
- [17] Timothy Lewis, Charles A. Cusack, and Lisa Dion, The complexity of pebbling reachability and solvability in planar and outerplanar graphs, Discrete Appl. Math. 172 (2014), 62–74, DOI 10.1016/j.dam.2014.03.008. MR3197262
- [18] Kevin Milans and Bryan Clark, The complexity of graph pebbling, SIAM J. Discrete Math. 20 (2006), no. 3, 769–798, DOI 10.1137/050636218. MR2272230
- [19] David Moews, Pebbling graphs, J. Combin. Theory Ser. B 55 (1992), no. 2, 244–252, DOI 10.1016/0095-8956(92)90043-W. MR1168965
- [20] Luke Postle, Noah Streib, and Carl Yeger, Pebbling graphs of diameter three and four, J. Graph Theory 72 (2013), no. 4, 398–417, DOI 10.1002/jgt.21648. MR3021349

(徐鑫 译 梁燕姣 校)
